Espaces vectoriels

Bernard Ycart

Vous devez vous habituer à penser en termes de « vecteurs » dans un sens très général : polynômes, matrices, suites, fonctions, etc. Le problème est que, contrairement à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, il est difficile de visualiser des vecteurs dans un espace de dimension infinie… quand ce sont des fonctions par exemple ! Avoir assimilé la théorie de la dimension finie serait une bonne idée avant d'attaquer ce chapitre.

Table des matières

1 Cours 1
1.1 Définition 1
1.2 Sous-espaces vectoriels 4
1.3 Familles génératrices 7
1.4 Familles libres 10
1.5 Dimension finie 12
1.6 Applications linéaires 14
1.7 Projections et symétries 18
1.8 Récurrences linéaires d'ordre deux 20

2 Entraînement 24
2.1 Vrai ou faux 24
2.2 Exercices 27
2.3 QCM 31
2.4 Devoir 33
2.5 Corrigé du devoir 34

3 Compléments 40
3.1 Kate and William : so romantic ! 40
3.2 Équations de récurrence linéaires 41
3.3 Équations différentielles linéaires 42
3.4 Polynômes de Lagrange 44
3.5 Transformée de Fourier 45

1er décembre 2014

1 Cours

1.1 Définition

Un *espace vectoriel* est un ensemble sur lequel sont définies :

- une addition interne (on peut ajouter entre eux deux éléments de l'ensemble et cela donne un élément de l'ensemble)
- une multiplication externe (on peut multiplier un élément de l'ensemble par un nombre réel et cela donne un élément de l'ensemble).

Ces deux opérations doivent vérifier certaines propriétés de compatibilité qui sont listées dans la définition 1.

Définition 1. *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si E est muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant les propriétés suivantes.*

- Addition : $\left\{\begin{array}{lcl} E\times E & \longrightarrow & E \\ (v,w) & \longmapsto & v+w \end{array}\right.$

  1. Associativité : $\forall u,v,w\in E\,,\quad u+(v+w)=(u+v)+w$

  2. Élément neutre : $\exists e\in E\,,\ \forall v\in E\,,\quad v+e=e+v=v$

  3. Opposé : $\forall v\in E\,,\exists v'\in E\,,\quad v+v'=v'+v=e$

  4. Commutativité : $\forall v,w\in E\,,\quad v+w=w+v$

  Ces propriétés font de $(E,+)$ un groupe commutatif.

- Multiplication externe : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda\, v \end{array}\right.$

  5. Associativité : $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,,\ \forall v\in E\,,\quad \lambda(\mu\, v)=(\lambda\mu)\, v$

  6. Élément neutre : $\forall v\in E\,,\quad 1\, v=v$

  7. Distributivité (1) : $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,,\ \forall v\in E\,,\quad (\lambda+\mu)\, v=\lambda\, v+\mu\, v$

  8. Distributivité (2) : $\forall \lambda\in\mathbb{R}\,,\ \forall v,w\in E\,,\quad \lambda\,(v+w)=\lambda\, v+\lambda\, w$

La proposition suivante nous autorisera à noter 0 l'élément neutre pour l'addition (nous l'appellerons « vecteur nul ») et $-v$ l'opposé de v.

Proposition 1. *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Le produit par le réel 0 d'un vecteur v quelconque est l'élément neutre pour l'addition :*
$$\forall v\in E\,,\quad 0\, v=e\,.$$
2. *Le produit par le réel -1 d'un vecteur v quelconque est son opposé pour l'addition :*
$$\forall v\in E\,,\quad v+(-1)\, v=e\,.$$

Démonstration : Notons (provisoirement) v' l'opposé de v pour l'addition : $v + v' = e$. En utilisant les propriétés de la définition 1 :

$$\begin{array}{rcll} 0\,v & = & 0\,v + e & \text{par } \textit{2.} \\ & = & 0\,v + (v + v') & \text{par } \textit{3.} \\ & = & 0\,v + (1\,v + v') & \text{par } \textit{6.} \\ & = & (0\,v + 1\,v) + v' & \text{par } \textit{1.} \\ & = & (0 + 1)\,v + v' & \text{par } \textit{7.} \\ & = & 1\,v + v' = v + v' = e & \text{par } \textit{6.} \end{array}$$

Ceci démontre le premier point. Pour le second, il suffit d'écrire

$$v + (-1)\,v = 1\,v + (-1)\,v = (1 + (-1))\,v = 0\,v = e\,.$$

□

Le singleton contenant seulement le vecteur nul est un espace vectoriel particulier. Ce n'est pas le plus intéressant. Voici quelques ensembles, naturellement munis d'une addition et d'une multiplication externe. Nous démontrerons plus loin que tous sont effectivement des espaces vectoriels.

1. *Nombres complexes :* $\mathbb{C} = \{\, a + \mathrm{i}b\,,\ a, b \in \mathbb{R}\,\}$.
   L'ensemble des complexes est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, qui agissent sur les parties réelles et imaginaires.
   - *Addition :* $(2 + 3\mathrm{i}) + (1 - 2\mathrm{i}) = 3 + \mathrm{i}$
   - *Multiplication externe :* $(-2)(2 - 3\mathrm{i}) = -4 + 6\mathrm{i}$
2. *n-uplets de réels :* $\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, \dots, x_n)\,,\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\,\}$.
   L'ensemble des n-uplets de réels (couples pour $n = 2$, triplets pour $n = 3$, ...) est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, coordonnée par coordonnée.
   - *Addition :* $(1, 2, 3, 4) + (3, -1, -2, 2) = (4, 1, 1, 6)$
   - *Multiplication externe :* $(-2)(3, -1, -2, 2) = (-6, 2, 4, -4)$
3. *Matrices à coefficients réels :* $\mathcal{M}_{m,n} = \{\, (a_{i,j})\,,\ a_{i,j} \in \mathbb{R}\,,\ 1 \leqslant i \leqslant m\,,\ 1 \leqslant j \leqslant n\,\}$.
   L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes, à coefficients réels, est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, coefficient par coefficient.
   - *Addition :* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$
   - *Multiplication externe :* $(-2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 8 & -10 & 12 \end{pmatrix}$
4. *Suites de réels :* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\, (u_n)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}\,\}$.
   L'ensemble des suites de réels est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, terme à terme.
   - *Addition :* $(2^{-n}) + (3^n) = (2^{-n} + 3^n)$
   - *Multiplication externe :* $(-2)\,(2^{-n}) = (-2^{-n+1})$

5. *Polynômes :* $\mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n\ ,\ n \in \mathbb{N}, (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.
   L'ensemble des polynômes d'une variable, à coefficients réels est aussi muni naturellement d'une addition et d'une multiplication externe.
   - *Addition :* $(-1 + 2X + 3X^2) + (3X - X^2 - 2X^4) = -1 + 5X + 2X^2 - 2X^4$
   - *Multiplication externe :* $(-2)\,(3X - X^2 - 2X^4) = -6X + 2X^3 + 4X^4$
6. *Applications :* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f\ : x \mapsto f(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) \in \mathbb{R}\}$.
   L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est muni de l'addition des images et de leur multiplication par un réel.
   - *Addition :* $(\cos + \sin)\ : x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$
   - *Multiplication externe :* $(-2)\ \cos\ : x \mapsto -2\cos(x)$

Il est inutile de s'inquiéter de la quantité de propriétés à vérifier dans la définition 1. Dans tous les exemples que l'on rencontrera, les opérations sont parfaitement naturelles et leurs propriétés évidentes. On ne vérifie d'ailleurs jamais les 8 propriétés de la définition 1. La raison pour laquelle c'est inutile sera explicitée dans la section suivante. Remarquons seulement pour l'instant que tous les exemples ci-dessus peuvent être mis en correspondance avec l'ensemble des applications d'un certain ensemble A, dans $\mathbb{R}$. Cela va sans dire pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les n-uplets de réels sont des applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{R}$. Les nombres complexes peuvent être identifiés à des couples de réels, les matrices à des applications de $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{R}$. Les suites sont des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Nous verrons plus loin comment les polynômes se ramènent à des suites. Nous nous contenterons donc de vérifier pour l'instant que l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Théorème 1. *Soit A un ensemble quelconque et $E = \mathbb{R}^A$ l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{R}$:*

$$E = \{\ v\ :\ x \in A \longmapsto v(x) \in \mathbb{R}\ \}\ .$$

L'ensemble E est muni des deux opérations suivantes.

- Addition : $(v + w)\ : x \longmapsto v(x) + w(x)$
- Multiplication externe : $(\lambda\, v)\ : x \longmapsto \lambda v(x)$

Muni de ces deux opérations, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Chacune des propriétés requises par la définition 1 provient d'une propriété analogue des réels. Plutôt que de répéter formellement les énoncés des propriétés, il est plus intéressant de comprendre quels sont les objets que l'on manipule. Par exemple, l'élément neutre pour l'addition, même si on le note aussi 0 n'est pas le réel 0 : c'est l'application nulle.

$$0\ :\ \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

De même, l'opposé de v est l'application qui à x associe $-v(x)$.

$$-v\ :\ \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -v(x) \end{cases}$$

Considérons la propriété *5.* de la définition 1.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,,\ \forall v \in E\,,\quad \lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)\, v$$

Elle signifie ici :

> « si on multiplie par λ l'application qui à x associe $\mu\, v(x)$, on trouve la même chose que si on multiplie par $\lambda\mu$ l'application qui à x associe $v(x)$, c'est-à-dire l'application qui à x associe $(\lambda\mu)\, v(x)$, »

…ce qui est bien vrai, n'est-ce pas ?

Nous laissons au lecteur le plaisir de traduire de même chacune des propriétés de la définition 1. □

Nous ne parlerons dans ce chapitre que d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Cependant, on peut remplacer $\mathbb{R}$ par un autre corps commutatif dans la définition 1, sans modifier notablement la théorie. Hormis $\mathbb{R}$, les corps les plus utilisés sont $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

La raison pour laquelle il est inutile en général de vérifier les 8 propriétés de la définition 1. est que tous les espaces vectoriels que l'on utilise sont des *sous-espaces* d'un espace vectoriel d'applications, c'est-à-dire qu'ils sont des sous-ensembles, sur lesquels on applique localement les opérations de l'espace entier.

Définition 2. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un* sous-espace vectoriel *de E s'il est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication externe de E.*

Observons que tout sous-espace vectoriel de E contient au moins le vecteur nul. La notion prend tout son intérêt grâce au théorème suivant.

Théorème 2. *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

$$\begin{array}{ll} \forall v, w \in F & v + w \in F \\ \forall v \in F\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} & \lambda v \in F \end{array} \tag{1}$$

Démonstration : Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors c'est un espace vectoriel et (1) est vrai.

Montrons la réciproque. Parmi les 8 propriétés de la définition 1, celles qui ne font intervenir que le quantificateur $\forall$ (associativités, commutativité, distributivités), puisqu'elles sont vraies dans E, restent vraies dans F à cause de (1). Il suffit donc de vérifier les 2 propriétés impliquant une existence (élément neutre et opposé). Nous devons démontrer que F contient le vecteur nul, ainsi que l'opposé de tout vecteur de F. D'après le premier point de la proposition 1, le vecteur nul s'écrit $0\, v$ pour tout vecteur v de E, donc pour tout vecteur de F. Comme F est non vide, il est donc dans F. De même si v est un vecteur de F, alors son opposé, qui s'écrit $(-1)\,v$ d'après le second point de la proposition 1, est aussi dans F. □

Voici une première application. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est *nulle à partir d'un certain rang* (on dit aussi *à support fini*) s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = 0$. Tout polynôme peut être identifié à la suite de ses coefficients, qui est nulle à partir d'un certain rang (le degré du polynôme, plus 1). La proposition suivante démontre donc du même coup que l'ensemble des polynômes, muni de l'addition et de la multiplication externe, est un espace vectoriel.

Proposition 2. *L'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de réels.*

Démonstration : Soit (u_n) une suite, nulle à partir du rang n_0, et (v_n) une suite nulle à partir du rang n_1. Alors la suite $(u_n + v_n)$ est nulle, au moins à partir du rang $\max\{n_0, n_1\}$ (et peut-être avant). Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) est nulle, au moins à partir du rang n_0. □

Le résultat suivant découle tout aussi facilement du théorème 2.

Proposition 3. *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel en général (pensez à deux droites distinctes).

Pour chacun des espaces vectoriels donnés en exemple à la section précédente, nous donnons dans les tableaux ci-dessous des sous-ensembles qui sont des sous-espaces vectoriels, et d'autres qui n'en sont pas. Nous conseillons au lecteur de le démontrer pour chacun. Pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, il suffit d'appliquer le théorème 2. Pour démontrer qu'un ensemble *n'est pas* un sous-espace vectoriel, il suffit de trouver un contre-exemple : vérifiez d'abord si 0 appartient à l'ensemble : si ce n'est pas le cas, c'est terminé. Sinon, vérifiez si l'opposé d'un vecteur de l'ensemble est dans l'ensemble. Si c'est encore vrai, trouvez deux vecteurs particuliers de l'ensemble, tels que leur somme n'y soit pas.

Complexes	
Oui	Non
$\{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) = 0 \,\}$	$\{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) = 1 \,\}$
$\{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \lvert z\rvert = 0 \,\}$	$\{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \lvert z\rvert = 1 \,\}$
$\{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \lvert z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\rvert = \lvert z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\rvert \,\}$	$\{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \lvert z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\rvert = \lvert z\rvert \,\}$

Couples de réels	
Oui	Non
$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ x=0\,\}$	$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ x=1\,\}$
$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ 3x-2y=0\,\}$	$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ 3x^2-2y^2=0\,\}$
$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ 2x+3y=0\,\}$	$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ \sin(3x+2y)=0\,\}$

Matrices	
Oui	Non
$\{\,A\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ A={}^tA\,\}$	$\{\,A\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ A=A^2\,\}$
$\{\,A\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ A\binom{1}{1}=\binom{0}{0}\,\}$	$\{\,A\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ A\binom{1}{1}=\binom{1}{1}\,\}$
$\{\,A\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ \mathrm{tr}(A)=0\,\}$	$\{\,A\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ \det(A)=0\,\}$

Suites de réels	
Oui	Non
$\{\,(u_n)\,,\ u_0=0\,\}$	$\{\,(u_n)\,,\ u_0=1\,\}$
$\{\,(u_n)\,,\ \exists l\ \lim u_n=l\,\}$	$\{\,(u_n)\,,\ \lim u_n=+\infty\,\}$
$\{\,(u_n)\,,\ \forall n\,,\ u_{n+1}=2u_n\,\}$	$\{\,(u_n)\,,\ \forall n\,,\ u_{n+1}=u_n+1\,\}$

Polynômes	
Oui	Non
$\{\,P\in\mathbb{R}[X]\,,\ \deg(P)\leqslant 5\,\}$	$\{\,P\in\mathbb{R}[X]\,,\ \deg(P)=5\,\}$
$\{\,P\in\mathbb{R}[X]\,,\ P(X)=P(-X)\,\}$	$\{\,P\in\mathbb{R}[X]\,,\ P^2(X)=P^2(-X)\,\}$
$\{\,P\in\mathbb{R}[X]\,,\ P(2)+P'(2)=0\,\}$	$\{\,P\in\mathbb{R}[X]\,,\ P(2)+P'(2)=1\,\}$

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	
Oui	Non
$\{\,f\,,\ f(0)=0\,\}$	$\{\,f\,,\ f(1)=1\,\}$
$\{\,f\,,$ continues en $0\,\}$	$\{\,f\,,\ \|f\|$ continue en $0\,\}$
$\{\,f\,,$ dérivables sur $]0,1[\,\}$	$\{\,f\,,$ non dérivables en $0\,\}$

Dans un espace vectoriel, l'associativité de l'addition permet d'écrire (sans parenthèses) des *combinaisons linéaires* de vecteurs.

Définition 3. *Soient $v_1,\dots,v_n$ n vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle* combinaison linéaire *de $v_1,\dots,v_n$, tout vecteur s'écrivant :*

$$\lambda_1\,v_1+\cdots+\lambda_n\,v_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,v_i\ ,$$

où $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des réels.

Théorème 3. *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *F est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *F contient toutes les combinaisons linéaires de deux de ses vecteurs.*
$$\forall v, w \in F\ ,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ , \quad \lambda\, v + \mu\, w \in F$$
3. *pour tout $n \geqslant 1$, F contient toutes les combinaisons linéaires de n de ses vecteurs.*
$$\forall v_1, \dots, v_n \in F\ ,\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\ , \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \in F$$

Démonstration : Rappelons que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il vérifie (1). L'équivalence entre (1) et *2* est un exercice facile, laissé au lecteur. L'implication *3* $\Longrightarrow$ *2* est évidente. Nous allons démontrer la réciproque *2* $\Longrightarrow$ *3*, par récurrence sur n. Notons $H(n)$ l'hypothèse de récurrence :

$$H(n)\ : \qquad \forall v_1, \dots, v_n \in F\ ,\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\ , \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \in F$$

Le point *2* est $H(2)$, et il implique $H(1)$ (cas particulier $\mu = 0$). Supposons que $H(n)$ soit vrai. Soient $v_1, \dots, v_{n+1}$ des vecteurs de F et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des réels. Ecrivons

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\, v_i = v + \lambda_{n+1}\, v_{n+1}\ ,$$

avec

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i$$

Le vecteur v appartient à F, par $H(n)$. La combinaison linéaire $v + \lambda_{n+1} v_{n+1}$ appartient à F d'après $H(2)$, d'où le résultat. □

1.3 Familles génératrices

D'après le théorème 3, un sous-espace vectoriel contient toutes les combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs : pour tout entier n, pour tous vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de E, et pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,

$$\lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \in E\ .$$

Une des manières de fabriquer un sous-espace vectoriel est de partir d'une *famille* d'éléments, puis de lui adjoindre toutes les combinaisons linéaires de ces éléments. Une famille d'éléments de E est définie comme une application d'un ensemble d'indices I, à valeurs dans E.

$$\mathcal{V} = \Big(\, v_i\ ,\ i \in I \,\Big)$$

Définition 4. *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{V}$ une famille de vecteurs de E. On appelle* sous-espace engendré *par $\mathcal{V}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de sous-familles finies quelconques d'éléments de $\mathcal{V}$.*

On dit que $\mathcal{V}$ est une famille génératrice *pour E si le sous-espace engendré par $\mathcal{V}$ est E lui-même.*

L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel, d'après le théorème 3. Le même théorème implique aussi que tout espace vectoriel contenant $\mathcal{V}$ doit contenir toutes les combinaisons linéaires de ses éléments. Donc le sous-espace engendré par $\mathcal{V}$ est inclus dans tout sous-espace contenant $\mathcal{V}$. Voici quelques exemples de familles avec les espaces qu'elles engendrent.

Complexes	
Famille	Espace engendré
$\big(\mathrm{i}\big)$	$\{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) = 0\,\}$
$\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\big)$	$\{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\,\}$
$\big(1, \mathrm{i}\big)$	$\mathbb{C}$

Couples de réels	
Famille	Espace engendré
$\big((0,1)\big)$	$\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x = 0\,\}$
$\big((1,1)\big)$	$\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,, x = y\,\}$
$\big((0,1),(1,1)\big)$	$\mathbb{R}^2$

Matrices	
Famille	Espace engendré
$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$	$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$	$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$	$\left\{\, A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ A\binom{1}{1} = \binom{0}{0}\,\right\}$

Suites de réels	
Famille	Espace engendré
$\big((2^n)\big)$	$\{\,(u_n)\,,\ \forall n\,,\ u_{n+1} = 2u_n\,\}$
$\big((u_n)\,,\ \exists\, n_0\,,\ \forall n \neq n_0\,,\ u_n = 0\big)$	$\{\,(u_n)\,,\ \exists\, n_0\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\ u_n = 0\,\}$
$\big((u_n)\,,\ \forall n\,,\ u_n \in [0,1]\big)$	$\{\,(u_n)\,,\ \exists M\,,\ \lvert u_n\rvert \leqslant M\,\}$

Polynômes	
Famille	Espace engendré
$\Big(X\Big)$	$\{\,\lambda X\,,\ \lambda\in\mathbb{R}\,\Big\}$
$\Big(1+X, 1-X\Big)$	$\{\,P\in\mathbb{R}[X]\,,\ \deg(P)\leqslant 1\,\}$
$\Big(P\in\mathbb{R}[X]\,,\ P(1)=1\Big)$	$\mathbb{R}[X]$

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	
Famille	Espace engendré
$\Big(\cos\Big)$	$\{\,\lambda\cos\,,\ \lambda\in\mathbb{R}\,\}$
$\Big(\cos,\sin\Big)$	$\{\,\lambda\cos+\mu\sin\,,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,\}$
$\Big(f\,,\ f(0)=1\Big)$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Notre définition de la *somme* de deux sous-espaces utilise la notion de sous-espace engendré.

Définition 5. *Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle* somme *de F et G, et on note $F+G$, l'espace engendré par la famille des vecteurs de $F\cup G$.*

Si $F\cap G=\{0\}$, on dit que la somme est directe*, et on la note $F\oplus G$.*

Si $F\oplus G=E$, on dit que F et G sont supplémentaires *dans E.*

La justification du terme « somme » et l'intérêt de cette notion résident dans la proposition suivante.

Proposition 4. *Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. *$F+G=\{\,v+w\,,\ v\in F\,,\ w\in G\,\}$.*
2. *Si $F\cap G=\{0\}$, alors pour tout vecteur u dans $F\oplus G$ il existe un unique couple de vecteurs (v,w), tels que $v\in F$, $w\in G$ et $u=v+w$.*

La figure 1 illustre la notion de somme directe.

Démonstration : Tout vecteur de la forme $v+w$, où $v\in F$ et $w\in G$, appartient à l'espace engendré par $F\cup G$. Réciproquement l'espace engendré par $F\cup G$ est formé des combinaisons linéaires d'un nombre quelconque d'éléments de $F\cup G$. Mais une telle combinaison linéaire peut s'écrire comme la somme de deux combinaisons linéaires : l'une ne contient que des éléments de F, et appartient donc à F, l'autre ne contient que des éléments de G, et appartient donc à G.

Dans le cas où la somme est directe, l'existence de la décomposition $u=v+w$ est démontrée par ce qui précède. Nous devons prouver l'unicité. Supposons $u=v_1+w_1=v_2+w_2$, avec $v_1,v_2\in F$ et $w_1,w_2\in G$. Les deux vecteurs v_1-v_2 et w_2-w_1 sont égaux,

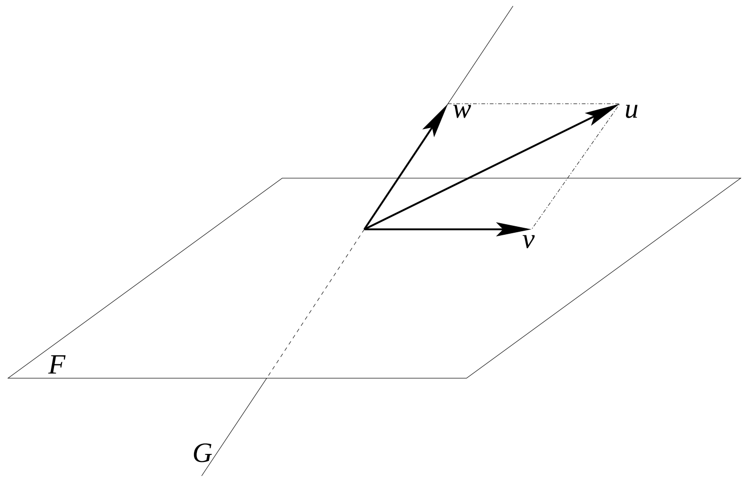

FIGURE 1 – Somme directe d'espaces vectoriels et décomposition d'un vecteur de la somme.

donc ils appartiennent à la fois à F et à G. Par hypothèse, $F \cap G = \{0\}$, donc $v_1 = v_2$ et $w_1 = w_2$. □

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes, considérons les deux familles suivantes :

$$\mathcal{V} = \Big(X^{2k} \,,\; k \in \mathbb{N} \Big) \quad \text{et} \quad \mathcal{W} = \Big(X^{2k+1} \,,\; k \in \mathbb{N} \Big)$$

Ce sont respectivement les familles des monômes de degrés pairs, et des monômes de degré impair. Soient F et G les espaces vectoriels engendrés respectivement par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$. L'espace vectoriel F contient tous les polynômes constitués uniquement de monômes de degrés pairs : par exemple, $1+3X^2-2X^4$. L'espace vectoriel G contient le polynôme nul, et tous les polynômes constitués uniquement de monômes de degrés impairs : par exemple, $X + 2X^3 - X^5$. L'intersection de F et G est réduite au polynôme nul. De plus, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit (de façon unique) comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Par exemple :

$$1 + X + 3X^2 + 2X^3 - 2X^4 - X^5 = \Big(1 + 3X^2 - 2X^4\Big) + \Big(X + 2X^3 - X^5\Big)$$

Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

1.4 Familles libres

Définition 6. *Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{V}$ une famille de vecteurs. On dit que $\mathcal{V}$ est une* famille libre *si pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout n-uplet $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de $\mathcal{V}$,*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i = 0 \implies \Big(\forall i = 1, \dots, n \,,\; \lambda_i = 0\Big)$$

Une famille (quelconque) de vecteurs est libre si toute sous-famille *finie* est libre : la seule combinaison linéaire nulle de ces vecteurs, a tous ses coefficients nuls. Observons que si une famille est libre dans un espace vectoriel E, elle reste libre dans n'importe quel espace vectoriel contenant E ou contenu dans E. Dans le cas contraire, elle est dite liée.

Nous rassemblons dans la proposition suivante des exemples classiques de familles libres, dans l'espace des polynômes, des suites, et des fonctions.

Proposition 5.

1. *Dans l'espace vectoriel des polynômes, toute famille de polynômes non nuls, de degrés distincts deux à deux, est libre.*
2. *Dans l'espace vectoriel des suites de réels, la famille des suites de la forme* $(r^k)_{k\in\mathbb{N}}$*, pour* $r > 0$*, est libre.*
3. *Dans l'espace vectoriel des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, la famille des fonctions de la forme* $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$*, pour* $\alpha \in \mathbb{R}$*, est libre.*

Démonstration : Pour démontrer qu'une famille est libre, nous devons montrer que toute sous-famille finie de n vecteurs est libre, pour tout n. Les trois démonstrations se font par récurrence sur n. Pour initialiser les récurrences, observons que la famille formée d'un seul vecteur non nul est toujours libre, quel que soit l'espace.

1. Soient $P_1, \ldots, P_n$ des polynômes non nuls, de degrés distincts deux à deux. Sans perte de généralité, supposons que les polynômes ont été rangés par ordre croissant de leurs degrés. Si $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$, alors le coefficient du terme de plus haut degré est nul, donc $\lambda_n = 0$. D'où le résultat, par récurrence.
2. Soient $r_1, \ldots, r_n$ des réels strictement positifs, distincts deux à deux. Supposons-les rangés par ordre croissant. Supposons que la suite de terme général $\lambda_1 r_1^k + \cdots + \lambda_n r_n^k$ soit nulle. Puisque r_n est strictement supérieur à tous les autres r_i,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n^k}(\lambda_1 r_1^k + \cdots + \lambda_n r_n^k) = \lambda_n \;,$$
donc $\lambda_n = 0$. D'où le résultat, par récurrence.
3. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels, distincts deux à deux. Supposons-les rangés par ordre croissant. Supposons que la fonction $x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{\alpha_n x}$ soit nulle. Puisque α_n est strictement supérieur à tous les autres α_i,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha_n x}}(\lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{\alpha_n x}) = \lambda_n \;,$$
donc $\lambda_n = 0$. D'où le résultat, par récurrence.

□

Par exemple :

1. $\Big(1, 2X + 3X^2, 3X - X^2 + X^3\Big)$ est une famille de polynômes, libre dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $\Big((2^{-k})_{k\in\mathbb{N}}, (2^k)_{k\in\mathbb{N}}, (3^k)_{k\in\mathbb{N}}\Big)$ est une famille de suites, libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. $\Big(x \mapsto \mathrm{e}^{-x}, x \mapsto 1, x \mapsto \mathrm{e}^x\Big)$ est une famille de fonctions, libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1.5 Dimension finie

La théorie de la dimension, qui est traitée dans un autre chapitre, est supposée connue. Nous rappelons ici quelques uns des principaux résultats.

Définition 7. *Soit E un espace vectoriel contenant des vecteurs non nuls. On dit que E est* finiment engendré *s'il est engendré par une famille finie de vecteurs. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ un n-uplet de vecteurs de E. On dit que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une* base *de E si c'est à la fois une famille génératrice et libre.*

Le résultat le plus important est le théorème suivant.

Théorème 4. *Dans un espace vectoriel contenant des vecteurs non nuls, finiment engendré, il existe des bases et toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Ceci permet d'appeler *dimension* de l'espace, le cardinal commun de toutes les bases. On convient de dire que l'espace contenant uniquement le vecteur nul, est de dimension 0. Les *coordonnées* d'un vecteur sont définies grâce au résultat suivant.

Théorème 5. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que*

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

Les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées* de v dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$.

Considérons par exemple l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 3. C'est un espace vectoriel de dimension 4, dont la base la plus naturelle (base canonique) est :

$$\Big(1\,,\,X\,,\,X^2\,,\,X^3\Big)$$

Dans cette base, les coordonnées du polynôme $2-X^2+X^3$ sont $(2, 0, -1, 1)$. Considérons maintenant une nouvelle famille.

$$\Big(1\,,\,(1+X)\,,\,(1+X+X^2)\,,\,(1+X+X^2+X^3)\Big)$$

C'est une famille de polynômes de degrés distincts, donc par la proposition 5, c'est une famille libre. Dans un espace de dimension 4, une famille libre de 4 éléments est forcément génératrice : c'est une base. Le polynôme $2-X^2+X^3$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des éléments de cette nouvelle base :

$$2 - X^2 + X^3 = 2(1) + 1(1 + X) + -2(1 + X + X^2) + 1(1 + X + X^2 + X^3)$$

Les coordonnées de $2 - X^2 + X^3$ dans la nouvelle base sont donc $(2, 1, -2, 1)$.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace est lui-même de dimension finie, inférieure ou égale à celle de l'espace. Le *théorème de la base incomplète* dit que dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base de l'espace. On en déduit immédiatement l'existence de supplémentaires.

Proposition 6. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Il existe un sous-espace vectoriel G tel que $F \oplus G = E$. De plus :*

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Démonstration : Soit $(b_1, \ldots, b_k)$ une base de F. Le théorème de la base incomplète affirme qu'il existe des vecteurs $c_1, \ldots, c_{n-k}$ tels que :

$$\Big(b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_{n-k} \Big)$$

soit une base de E. Soit G l'espace engendré par $(c_1, \ldots, c_{n-k})$. Tout vecteur de E s'écrit :

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, b_i + \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j\, c_j$$

La première somme est un vecteur de F, la seconde un vecteur de G, donc $E = F + G$. Il reste à vérifier que l'intersection est réduite au seul vecteur nul. Si

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, b_i = \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j\, c_j \ ,$$

alors nécessairement tous les coefficients λ_i et μ_j sont nuls, car $(b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_{n-k})$ est une famille libre. D'où le résultat. □

La proposition suivante relie la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels à celles des composants.

Proposition 7. *Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels, de dimensions finies.*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration : Choisissons un supplémentaire G' de $F \cap G$ dans G. La somme de F et G' est directe, car $G' \cap F = G' \cap (F \cap G) = \{0\}$. Donc :

$$F + G = F \oplus G' \,,$$

Or $\dim(G') = \dim(G) - \dim(F \cap G)$. Donc :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G') = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \,.$$

□

1.6 Applications linéaires

Une application entre deux espaces vectoriels est dite *linéaire* si elle respecte les deux opérations définissant la structure.

Définition 8. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une* application linéaire *si*

$$\begin{array}{lrcl} \forall v, w \in E & f(v+w) & = & f(v) + f(w) \\ \forall v \in E\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} & f(\lambda v) & = & \lambda\, f(v) \end{array} \tag{2}$$

Une application linéaire f de E dans F envoie nécessairement le vecteur nul de E sur le vecteur nul de F. Elle envoie l'opposé de v sur l'opposé de $f(v)$. La proposition suivante se démontre facilement, dans le style du théorème 3.

Proposition 8. *Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application de E dans F. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *f est une application linéaire.*
2. $$\forall v, w \in E\,,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,,\quad f(\lambda\, v + \mu\, w) = \lambda\, f(v) + \mu\, f(w)\,.$$
3. *Pour tout $n \geqslant 1$,*

$$\forall v_1, \ldots, v_n \in E\,,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\,,\quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(v_i)$$

D'une application entre deux ensembles munis d'une structure (groupes, anneaux, etc.) qui respecte les structures, on dit qu'elle est un *morphisme.*

Définition 9. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que l'application f est un :*

- morphisme *si elle est linéaire,*
- isomorphisme *si elle est linéaire et bijective,*
- endomorphisme *si elle est linéaire et $E = F$,*

- automorphisme *si elle est linéaire, bijective et* $E = F$.

Voici quelques exemples d'applications linéaires.

- *de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $z \longmapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$
- *de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$: $z \longmapsto \overline{z}$
- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \longmapsto (x + y, 2x + 3y)$
- *de* $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$: $A \longmapsto {}^tA$
- *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_0, u_1)$
- *de* $\mathbb{R}[X]$ *dans* $\mathbb{R}$: $P(X) \longmapsto P(0)$
- *de* $\mathbb{R}[X]$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $P(X) \longmapsto (P(0), P'(1))$
- *de* $\mathbb{R}[X]$ *dans* $\mathbb{R}[X]$: $P(X) \longmapsto (X + 1)P'(X)$
- *de l'espace vectoriel des suites convergentes, dans* $\mathbb{R}$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim u_n$
- *de l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables, dans l'espace vectoriel des fonctions continues* : $f \longmapsto f'$
- *de l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $[a, b]$*, dans* $\mathbb{R}$: $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$

Le fait qu'une application linéaire respecte les combinaisons linéaires entraîne qu'elle respecte aussi les sous-espaces vectoriels, au sens suivant.

Théorème 6. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels, et* f *une application linéaire de* E *dans* F.

1. *Soit* A *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors*
$$f(A) = \{\, f(v)\,,\ v \in A \,\}\ ,$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. *Soit* B *un sous-espace vectoriel de* F. *Alors*
$$f^{-1}(B) = \{\, v \in E\,,\ f(v) \in B \,\}\ ,$$
est un sous-espace vectoriel de E.

L'ensemble des images par une application linéaire des éléments d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée (point *1*). L'ensemble des éléments de l'espace de départ dont l'image par une application linéaire est dans un sous-espace de l'espace d'arrivée, est un sous-espace de l'espace de départ (point *2*).
Attention à la notation $f^{-1}(B)$: elle a un sens même si l'application f n'est pas bijective et donc même si l'application réciproque f^{-1} n'existe pas.

Démonstration : Pour montrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel, il suffit de vérifier qu'il est non vide, et que toute combinaison linéaire de deux de ses vecteurs reste dans l'ensemble (théorème 3). Rappelons que tout sous-espace vectoriel contient au moins le vecteur nul, et que si f est linéaire alors $f(0) = 0$. Donc le vecteur nul de F appartient à $f(A)$ et celui de E appartient à $f^{-1}(B)$. Les deux ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont donc non vides.

1. Deux vecteurs quelconques de $f(A)$ s'écrivent $f(v), f(v')$, où $v, v' \in A$. Etant donnés deux réels λ et μ, $\lambda\, f(v) + \mu\, f(v')$ est l'image par f de $\lambda\, v + \mu\, v'$ qui est un vecteur de A.
2. Si v et v' sont tels que $f(v)$ et $f(v')$ appartiennent à B, alors $f(\lambda\, v + \mu\, v') = \lambda\, f(v) + \mu\, f(v') \in B$. Donc $\lambda\, v + \mu\, v' \in f^{-1}(B)$.

□

Parmi les cas particuliers du théorème 6, l'*image* et le *noyau* jouent un rôle important.

Définition 10. *Soient E, F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle*

1. image de f *et on note* $\mathrm{Im}(f)$ *le sous-espace vectoriel de F :*

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{\, f(v)\,,\ v \in E\,\}\ .$$

2. noyau de f *et on note* $\mathrm{Ker}(f)$ *le sous-espace vectoriel de E :*

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{\, v \in E\,,\ f(v) = 0\,\}\ .$$

La notation Ker vient de l'allemand, où noyau se dit « Kern ».

Proposition 9. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'application f est*

1. surjective *si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$
2. injective *si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

Démonstration : La caractérisation de la surjectivité est une simple traduction des définitions. Celle de l'injectivité utilise la linéarité. Soient v et w deux éléments de E.

$$f(v) = f(w) \iff f(v-w) = 0 \iff (v-w) \in \mathrm{Ker}(f)$$

Par définition, f est injective si et seulement si $f(v) = f(w)$ implique $v = w$, donc si et seulement si $(v-w) \in \mathrm{Ker}(f)$ implique $v - w = 0$, d'où le résultat. □

Considérons la dérivation des polynômes. C'est l'application D de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

$$\begin{array}{rcl} & D & \\ \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = P(X) & \longmapsto & P'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}. \end{array}$$

C'est une application linéaire. L'image de D est $\mathbb{R}[X]$ tout entier (D est surjective), le noyau de D est l'ensemble des polynômes constants (D n'est pas injective). Une telle situation, où l'espace de départ et l'image sont les mêmes tandis que le noyau est non nul, est impossible entre espaces vectoriels de dimension finie.

Reprenons l'exemple de la dérivation des polynômes, mais cette fois-ci vue comme une application de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$ dans lui-même. L'espace est de dimension $n+1$, et la base canonique est $(1, X, \ldots, X^n)$. L'application D envoie ces $n+1$ polynômes, respectivement sur $0, 1, \ldots, nX^{n-1}$. Ils engendrent l'espace vectoriel des polynômes de degré $n-1$, qui est de dimension n. Le noyau de D est $\mathbb{R}_0[X]$, et l'image de D est $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

En dimension finie, la dimension de l'espace de départ est la somme de la dimension de l'image et de la dimension du noyau : c'est le *théorème du rang*.

Théorème 7. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie, il en est de même pour* $\mathrm{Im}(f)$ *et* $\mathrm{Ker}(f)$ *et :*

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)\ .$$

Démonstration : celle que nous donnons ici est basée sur la notion de supplémentaire. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Donc $\Big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\Big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f)$ est finiment engendré, et admet une base. Chacun des éléments de cette base est image d'un vecteur de E. Notons donc $(f(c_1), \ldots, f(c_k))$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. La famille $(c_1, \ldots, c_k)$ est libre, car sinon son image par f serait liée. Soit G le sous-espace de E, engendré par $(c_1, \ldots, c_k)$. Nous allons montrer que G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E, ce qui implique le résultat.

Soit v un vecteur quelconque de E. Comme $f(v)$ est un vecteur de $\mathrm{Im}(f)$, il s'écrit :

$$f(v) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f(c_i)$$

Posons :

$$w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c_i$$

Alors :

$$f(v-w) = f(v) - \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f(c_i)\right) = 0$$

Donc $v - w \in\ \mathrm{Ker}(f)$. Donc $v = (v-w) + w$ est somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'un vecteur de G. Pour montrer que la somme est directe, nous devons montrer que l'intersection est réduite au vecteur nul. Prenons un vecteur de G sous la forme :

$$w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c_i$$

S'il appartient aussi à $\mathrm{Ker}(f)$, son image est nulle :

$$f(w) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f(c_i) = 0$$

Mais puisque $\Big(f(c_1), \ldots, f(c_k)\Big)$ est une famille libre, ceci entraîne que les λ_i sont tous nuls, donc w est le vecteur nul. $\square$

1.7 Projections et symétries

L'étude des projections et symétries, sera l'occasion de mettre en œuvre à la fois des applications linéaires entre espaces vectoriels généraux et les sommes d'espaces vectoriels. Aussi bien pour les projections que pour les symétries, l'ingrédient principal est une somme directe. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces tels que $E = F \oplus G$. Pour tout vecteur u dans E, il existe un couple unique de vecteurs (v, w) tels que $v \in F$, $w \in G$ et $u = v + w$ (voir la proposition 4 et la figure 1).

Définition 11. *Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces tels que $E = F \oplus G$.*

1. *On appelle* projection *sur F parallèlement à G l'application qui à $u \in E$ associe l'unique élément v de F tel que $u - v \in G$.*
2. *On appelle* symétrie *par rapport à F parallèlement à G l'application qui à $u \in E$ associe $v - w$, où (v, w) est le couple unique de vecteurs tels que $v \in F$, $w \in G$ et $u = v + w$.*

La figure 2 illustre la projection sur F parallèlement à G et la symétrie correspondante. Reprenons par exemple la décomposition de l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$, où F (respectivement : G) est l'ensemble des polynômes ne contenant que des termes de degré pair (respectivement : impair). La projection p sur F parallèlement à G associe à un polynôme, le polynôme formé par ses termes de degré pair.

$$p(1 + X + 3X^2 + 2X^3 - 2X^4 - X^5) = 1 + 3X^2 - 2X^4$$

La symétrie par rapport à F change le signe des termes de degré impair (transformation $X \mapsto -X$).

$$s(1 + X + 3X^2 + 2X^3 - 2X^4 - X^5) = \Big(1 + 3X^2 - 2X^4\Big) - \Big(X + 2X^3 - X^5\Big)$$

Proposition 10. *Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces tels que $E = F \oplus G$. La projection sur F d'une part, et la symétrie par rapport à F parallèlement à G d'autre part, sont des applications linéaires.*

Démonstration : Si $u = v + w$ et $u' = v' + w'$, alors

$$\lambda\, u + \mu\, u' = (\lambda\, v + \mu\, v') + (\lambda\, w + \mu\, w')\ .$$

Puisque les vecteurs $\lambda\, v + \mu\, v'$ et $\lambda\, w + \mu\, w'$ appartiennent respectivement à F et G, la formule précédente donne la décomposition de $\lambda\, u + \mu\, u'$. Sa projection sur F est donc $\lambda\, v + \mu\, v'$, et son symétrique par rapport à F est

$$(\lambda\, v + \mu\, v') - (\lambda\, w + \mu\, w') = \lambda\,(v - w) + \mu\,(v' - w')\ ,$$

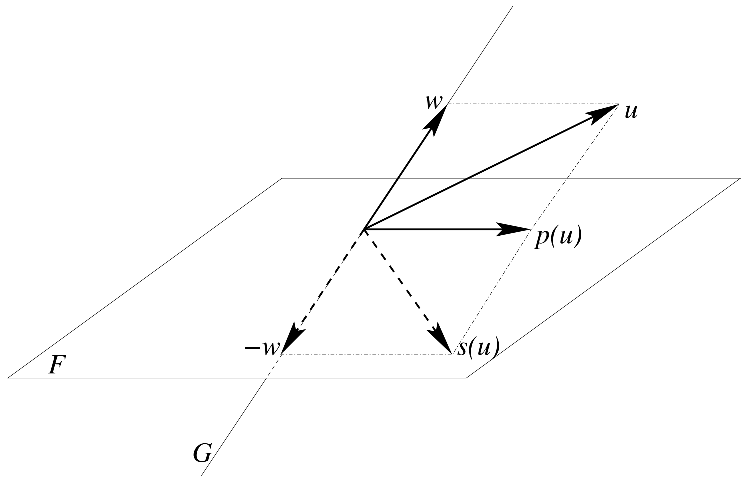

FIGURE 2 – Somme directe $E = F \oplus G$, projection sur F, et symétrie par rapport à F.

d'où le résultat. □

La projection sur F parallèlement à G a pour image F et pour noyau G. La symétrie est une bijection de E sur lui-même : c'est un *automorphisme* de E. La proposition suivante caractérise les projections et les symétries, indépendamment de la décomposition en somme directe.

Proposition 11. *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Un endomorphisme p de E est une projection si et seulement si $p \circ p = p$.*
2. *Un endomorphisme s de E est une symétrie si et seulement si $s \circ s = I_E$, où I_E désigne l'application identique de E.*

Démonstration : Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors pour tout $v \in F$, $p(v) = v$, et donc $p \circ p = p$. Réciproquement, si $p \circ p = p$, nous allons montrer que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. Commençons par montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires, c'est-à-dire que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Observons que pour tout $u \in E$,

$$p(u - p(u)) = p(u) - p \circ p(u) = 0 ,$$

donc $u - p(u) \in \mathrm{Ker}(p)$. On peut toujours écrire $u = p(u) + (u - p(u))$. Pour vérifier que la somme est directe, nous devons montrer que l'intersection de l'image et du noyau est réduite au vecteur nul. Si $u \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p)$, alors il existe v tel que $u = p(v)$ (puisque u est dans l'image), et de plus $p(u) = 0$ (puisque u est dans le noyau). Donc $p(p(v)) = 0$. Mais $p(p(v)) = p(v) = u$. D'où le résultat.

Nous avons montré que $U = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. La décomposition d'un vecteur u selon cette somme directe est

$$u = p(u) + (u - p(u)) .$$

Donc $p(u)$ est bien la projection de u sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

La formule $v-(-w) = v+w$ entraîne que la composée d'une symétrie par elle-même est l'application identique. Réciproquement, soit s une application telle que $s \circ s = I_E$. Définissons les applications p_1 et p_2 par :

$$p_1 \ : u \longmapsto \frac{1}{2}(u + s(u)) \quad \text{et} \quad p_2 \ : u \longmapsto \frac{1}{2}(u - s(u)) \ .$$

Composons l'application p_1 par elle-même :

$$\begin{aligned} p_1 \circ p_1(u) &= p_1\left(\frac{1}{2}(u + s(u))\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(p_1(u) + p_1(s(u))\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(u + s(u) + s(u) + s \circ s(u)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(2u + 2s(u)\Big) = p_1(u) \ . \end{aligned}$$

On vérifie de même que $p_2 \circ p_2 = p_2$. D'après ce qui précède, p_1 et p_2 sont donc des projections. Or $p_1 + p_2 = I_E$. Il s'ensuit que si p_1 est la projection sur F parallèlement à G, alors p_2 est la projection sur G parallèlement à F. Mais puisque $s = p_1 - p_2$, alors s est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G. □

1.8 Récurrences linéaires d'ordre deux

Comme application des notions de ce chapitre, nous proposons d'étudier l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence suivante :

$$(\mathcal{E}) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ , \quad u_{n+2} = \alpha\, u_{n+1} + \beta\, u_n \ ,$$

où α et β sont deux réels fixés. L'exemple le plus simple est l'équation définissant les nombres de Fibonacci, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Nous notons E l'ensemble des suites de réels qui vérifient $(\mathcal{E})$. Dire que $(\mathcal{E})$ est linéaire revient à dire que E est un espace vectoriel.

Proposition 12. *L'ensemble E des suites de réels vérifiant $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel de dimension 2.*

Démonstration : Commençons par vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de réels. Nous en donnerons ensuite une base.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $(\mathcal{E})$, λ, μ deux réels.

$$u_{n+2} = \alpha\, u_{n+1} + \beta\, u_n \quad \text{et} \quad v_{n+2} = \alpha\, v_{n+1} + \beta\, v_n$$

impliquent :

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \alpha\, (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + \beta\, (\lambda u_n + \mu v_n)$$

Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)$ vérifie $(\mathcal{E})$. D'où le résultat en appliquant le théorème 2. On peut aussi démontrer que l'application qui à une suite (u_n) quelconque associe la suite de terme général $v_n = u_{n+2} - \alpha u_{n+1} - \beta u_n$ est une application linéaire. L'ensemble E est le noyau de cette aplication. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, par le théorème 6.

Considérons maintenant les deux suites (b_n) et (b'_n), vérifiant $(\mathcal{E})$ et telles que

$$b_0 = 1\,,\ b_1 = 0 \quad \text{et} \quad b'_0 = 0\,,\ b'_1 = 1\,.$$

Soit (u_n) une suite quelconque vérifiant $(\mathcal{E})$. La suite (u_n) est définie de façon unique par la donnée de $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et l'équation $(\mathcal{E})$. Donc la suite (u_n) est égale à la combinaison linéaire $u_0(b_n) + u_1(b'_n)$: la famille $\Big((b_n), (b'_n)\Big)$ est génératrice. Supposons que (u_n) soit la suite nulle. Alors $u_0 = u_1 = 0$. Donc la famille $\Big((b_n), (b'_n)\Big)$ est libre : c'est une base. □

Pour trouver une expression explicite aux solutions de $(\mathcal{E})$, nous allons trouver une autre base. Nous commençons par écarter le cas où $\alpha = \beta = 0$: dans ce cas, les suites solutions de $(\mathcal{E})$ sont nulles à partir du rang 2. Nous supposons désormais que α et β ne sont pas tous les deux nuls. Cherchons quelles suites géométriques vérifient $(\mathcal{E})$. Supposons que (r^n) vérifie $(\mathcal{E})$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad r^{n+2} = \alpha\, r^{n+1} + \beta\, r^n\,.$$

C'est vrai si r est nul, ou bien s'il est solution de l'équation du second degré suivante, qu'on appelle l'*équation caractéristique associée.*

$$(ECA) \qquad r^2 = \alpha\, r + \beta\,.$$

Théorème 8. *Si l'équation caractéristique associée possède*

1. *deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors $\Big((r_1^n), (r_2^n)\Big)$ est une base de E :*

$$E = \Big\{\, (\lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n)\,,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \,\Big\}.$$

2. *une racine double r, alors $\Big((r^n), (nr^n)\Big)$ est une base de E :*

$$E = \Big\{\, (\lambda\, r^n + \mu\, nr^n)\,,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \,\Big\}.$$

3. *deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors $\Big((\rho^n \cos(n\theta)), (\rho^n \sin(n\theta))\Big)$ est une base de E :*

$$E = \Big\{\, (\lambda\, \rho^n \cos(n\theta) + \mu\, \rho^n \sin(n\theta))\,,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \,\Big\}.$$

Démonstration : Puisque l'espace vectoriel E est de dimension 2, il suffit dans chacun des trois cas de montrer que les deux suites proposées vérifient $(\mathcal{E})$ et forment une famille libre.

Dans le premier cas, les deux suites vérifient $(\mathcal{E})$ car r_1 et r_2 sont racines de (ECA). Pour montrer qu'elles forment une famille libre, supposons que la suite $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)$ soit nulle. Les deux premiers termes sont :

$$\lambda + \mu = 0 \quad \text{et} \quad \lambda r_1 + \mu r_2 = 0$$

Puisque $r_1 \neq r_2$, ce système de deux équations a une solution unique, $\lambda = \mu = 0$.

Dans le second cas la racine double est $r = \alpha/2$ et elle est non nulle, le cas $\alpha = \beta = 0$ étant écarté. Il est évident que (r^n) vérifie $(\mathcal{E})$. On le vérifie facilement pour (nr^n). Pour montrer que la famille est libre, supposons que la suite $(\lambda r^n + \mu n r^n)$ soit nulle. Les deux premiers termes sont :

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda r + \mu r = 0 \; .$$

Donc (puisque $r \neq 0$), $\lambda = \mu = 0$.

Traitons maintenant le dernier cas : (ECA) a deux racines complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Les suites (complexes) $(\rho^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta})$ et $(\rho^n \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta})$ vérifient $(\mathcal{E})$. Leur somme et leur différence sont :

$$\rho^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} + \rho^n \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} = 2\rho^n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \rho^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} - \rho^n \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} = 2\mathrm{i}\rho^n \sin(n\theta) \; .$$

On en déduit que les deux suites proposées vérifient $(\mathcal{E})$. Pour montrer que la famille est libre, supposons que la suite $(\lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta))$ soit nulle. Les deux premiers termes sont :

$$\lambda = 0 \; , \quad \lambda \rho \cos(\theta) + \mu \rho \sin(\theta) = 0 \; .$$

On en déduit donc que $\mu \rho \sin(\theta) = 0$, donc $\mu = 0$ car $\rho \sin(\theta)$ est non nul (sinon les racines de (ECA) seraient réelles). □

Comme premier exemple, considérons l'équation définissant les nombres de Fibonacci :

$$(\mathcal{E}) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; , \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \; .$$

L'équation caractéristique associée est

$$(ECA) \qquad r^2 = r + 1 \; .$$

Elle a deux racines réelles distinctes, ϕ et $-1/\phi$, où ϕ est le nombre d'or :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; .$$

L'ensemble des suites réelles vérifiant $(\mathcal{E})$ est donc

$$\left\{ \left(\lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \; , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} .$$

Les nombres de Fibonacci sont définis par $(\mathcal{E})$, avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Pour calculer les coordonnées λ et μ de cette suite, il faut résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda + \mu & = & 1 \\ \lambda\phi - \mu/\phi & = & 1 \end{array}\right.$$

On en déduit l'expression suivante du n-ième nombre de Fibonacci :

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right) \;.$$

(Persuadez-vous que u_n est bien un entier !)

Considérons maintenant l'équation suivante.

$$(\mathcal{E}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\;, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \;.$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(ECA) \qquad r^2 = -r - 1 \;.$$

Ses racines sont :

$$j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} \quad \text{et} \quad \overline{j} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}$$

Toute solution réelle de l'équation de récurrence s'écrit :

$$(u_n) = (\,\lambda\,\cos(n2\pi/3) + \mu\,\sin(n2\pi/3)\,)\;.$$

Les solutions sont périodiques de période 3.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des suites réelles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☒ Ensemble des suites bornées.
2. ☐ Ensemble des suites décroissantes à partir d'un certain rang.
3. ☒ Ensemble des suites périodiques.
4. ☒ Ensemble des suites convergeant vers 0.
5. ☐ Ensemble des suites monotones.
6. ☐ Ensemble des suites équivalentes à $1/n$.
7. ☒ Ensemble des suites dominées par $1/n$.
8. ☒ Ensemble des suites négligeables devant $1/n$.
9. ☐ Ensemble des suites dont le terme général est $\leqslant 1$ à partir d'un certain rang.

Vrai-Faux 2. Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des polynômes, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☒ Ensemble des polynômes, nul ou de degré 0.
2. ☐ Ensemble des polynômes de degré 3.
3. ☒ Ensemble des polynômes dont le terme constant est nul.
4. ☐ Ensemble des polynômes à coefficients positifs ou nuls.
5. ☒ Ensemble des polynômes multiples de $X-1$.
6. ☐ Ensemble des polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$.
7. ☒ Ensemble des polynômes multiples de $X-1$ ou X^2-1.
8. ☐ Ensemble des polynômes contenant uniquement des monômes de degrés impairs.
9. ☒ Ensemble des polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit formée uniquement de monômes de degrés impairs.

Vrai-Faux 3. Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☒ Ensemble des fonctions telles que $f(0) = f(1)$.
2. ☐ Ensemble des fonctions telles que $f(0) = 1$.
3. ☒ Ensemble des fonctions nulles sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. ☐ Ensemble des fonctions croissantes.
5. ☐ Ensemble des fonctions f telles que $f^2(x) = f^2(-x)$.

6. ☒ Ensemble des fonctions périodiques de période 2π.
7. ☒ Ensemble des fonctions f telles que la suite $(f(n))$ tend vers 0.
8. ☒ Ensemble des fonctions dérivables sur f telles que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.
9. ☐ Ensemble des fonctions dérivables sur f telles que $\int_0^1 \cos(f(x))\,dx = 0$.

Vrai-Faux 4. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels peut être vide.
2. ☐ Si un ensemble contient toutes les droites vectorielles engendrées par ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.
3. ☒ Si un ensemble contient tous les plans vectoriels engendrés par deux de ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.
4. ☒ Si un ensemble contient toutes les combinaisons linéaires de 3 quelconques de ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.
5. ☐ Si un ensemble contient la somme de deux quelconques de ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.
6. ☒ Si l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est réduite au vecteur nul, alors leur somme est directe.
7. ☒ La somme de deux droites vectorielles est un plan vectoriel si et seulement si cette somme est directe.
8. ☐ Dans un espace de dimension 3, la somme d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel est toujours directe.
9. ☒ Dans un espace de dimension 3, la somme de deux plans vectoriels n'est jamais directe.

Vrai-Faux 5. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
2. ☐ L'ensemble des polynômes réels de degré $\leqslant 3$ est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.
3. ☒ L'ensemble des suites réelles, constantes ou bien périodiques de période 3, est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.
4. ☒ L'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré $\leqslant 3$ est un espace vectoriel de dimension 8 sur $\mathbb{R}$.
5. ☐ L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
6. ☒ L'ensemble des fonctions de $\{0,1\}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Vrai-Faux 6. Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, lesquelles sont des applications linéaires, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☒ $P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$
2. ☐ $P(X) \longmapsto P(X+1) - X$
3. ☒ $P(X) \longmapsto XP(X+1) - P'(X)$
4. ☒ $P(X) \longmapsto XP(X+1) - P'(1)$
5. ☐ $P(X) \longmapsto XP(X+1) - P^2(1)$

Vrai-Faux 7. Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ L'image du vecteur nul de E est le vecteur nul de F.
2. ☒ L'image de f est un sous-espace vectoriel de F.
3. ☐ L'image par f d'une famille libre dans E est toujours une famille libre dans F.
4. ☒ L'image par f d'une famille liée dans E est une famille liée dans F.
5. ☐ L'image par f d'une famille génératrice dans E est toujours une famille génératrice dans F.
6. ☐ Si F est de dimension finie alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace de dimension finie de E.
7. ☒ Si E est de dimension finie alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de dimension finie de F.
8. ☒ Si E et F sont de dimension finie, et $\dim(E) > \dim(F)$ alors $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$.
9. ☐ Si E et F sont de dimension finie, et $\dim(E) > \dim(F)$ alors f est surjective.
10. ☐ Si E et F sont de dimension finie, et $\dim(E) < \dim(F)$ alors f est injective.

Vrai-Faux 8. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E (tels que $F \oplus G = E$). On note :

- p la projection sur F parallèlement à G,
- s la symétrie par rapport à F parallèlement à G,
- p' la projection sur G parallèlement à F,
- s' la symétrie par rapport à G parallèlement à F,
- I l'application identique de E.

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $p + p' = I$.
2. ☐ $s + s' = I$.
3. ☐ $s - s' = 2p'$.
4. ☒ $p - p' = s$.
5. ☐ $s - p = p'$.

6. ☒ $s + p' = p$.
7. ☐ $p \circ s' = p$.
8. ☒ $p' \circ s' = p'$.
9. ☒ $s' \circ s = -I$.
10. ☐ $p' \circ p = I$.

2.2 Exercices

Exercice 1. Montrer que les familles suivantes sont libres dans l'espace vectoriel des $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Décrire l'espace vectoriel que chacune engendre.

1. $\Big(X \,, \, (X-1) \Big)$
2. $\Big(X^2 \,, \, (X^2-1) \Big)$
3. $\Big(X^2 \,, \, (X-1)^2 \,, \, (X-2)^2 \Big)$
4. $\Big(X^3 \,, \, (X+1)^3 \,, \, (X-1)^3 \Big)$

Exercice 2. Montrer que les familles suivantes sont libres dans l'espace vectoriel des suites de réels.

1. $\Big((1) \,, \, (2^n) \,, \, (n2^n) \Big)$
2. $\Big((1) \,, \, (\cos(n\pi/4)) \,, \, (\cos(n\pi/2)) \Big)$
3. $\Big((1) \,, \, (\sin(n\pi/4)) \,, \, (\sin(n\pi/2)) \Big)$
4. $\Big((1) \,, \, (2^n \cos(n\pi/4)) \,, \, (n2^n \cos(n\pi/4)) \Big)$

Exercice 3. Montrer que la famille (f, g, h) est libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans les cas suivants.

1. $f \;: x \mapsto 1 \,, \quad g \;: x \mapsto x \,, \quad h \;: x \mapsto x^2$
2. $f \;: x \mapsto 1 \,, \quad g \;: x \mapsto |x| \,, \quad h \;: x \mapsto \sqrt{|x|}$
3. $f \;: x \mapsto \mathrm{e}^x \,, \quad g \;: x \mapsto \cos(x) \,, \quad h \;: x \mapsto \sin(x)$
4. $f \;: x \mapsto \sin(x) \,, \quad g \;: x \mapsto \sin(2x) \,, \quad h \;: x \mapsto \sin(3x)$

Exercice 4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, des polynômes de degrés au plus égal à 3, on considère les familles suivantes.

- $\Big((1+X^2) \,)$
- $\Big((1+X^2) \,, \, (1-X^2) \,)$
- $\Big((X+X^2+X^3) \,, \, (X-X^2+X^3) \,)$
- $\Big((1+X) \,, \, (1+X^2) \,, \, (1-X^2) \,)$
- $\Big((1+X) \,, \, (1+X^3) \,, \, (1-X^3) \,)$

Pour chacune de ces familles :

1. Démontrer que c'est une famille libre.
2. Décrire le sous-espace F engendré par la famille.
3. Compléter la famille en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Déterminer un supplémentaire G du sous-espace engendré F.
5. Ecrire chacun des polynômes suivants comme somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de G.

$$1\ ;\ X\ ;\ X^2\ ;\ X^3\ ;\ 1-X+X^2-X^3\ ;\ 1+2X+3X^2+4X^3$$

Exercice 5. Soient E, F, G trois sous-espaces d'un même espace vectoriel.

1. Montrer que $E \cap (F+G) \supset (E \cap F) + (E \cap G)$.
2. Montrer que $E + (F \cap G) \subset (E+F) \cap (E+G)$.
3. Montrer que $E \cap (F + (E \cap G)) = (E \cap F) + (E \cap G)$.
4. Trois sous-espaces E, F, G de $\mathbb{R}^3$ sont définis comme suit.
   - $E = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x = y = 0 \Big\}$
   - $F = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ z = 0 \Big\}$
   - $G = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x+y+z = 0 \Big\}$

   Donner la dimension de E, F, G, et de chacun des sous-espaces apparaissant dans les questions 1 à 3.
5. Trois sous-espaces E, F, G de $\mathbb{R}_2[X]$ sont définis comme suit.
   - $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}_2[X]\,,\ P'' = 0 \Big\}$
   - $F = \Big\{ P \in \mathbb{R}_2[X]\,,\ P' = 0 \Big\}$
   - $G = \Big\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \in \mathbb{R}^3\,,\ P(1) = 0 \Big\}$

   Donner la dimension de E, F, G, et de chacun des sous-espaces apparaissant dans les questions 1 à 3.
6. Trois sous-espaces E, F, G de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ sont définis comme suit.
   - $E = \Big\{ A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ \mathrm{tr}(A) = 0 \Big\}$
   - $F = \Big\{ A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ A\binom{1}{0} = \binom{0}{0} \Big\}$
   - $G = \Big\{ A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\ (1,0)A = (0,0) \Big\}$

   Donner la dimension de E, F, G, et de chacun des sous-espaces apparaissant dans les questions 1 à 3.

Exercice 6. Soit F l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les fonctions f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = f(-x)\ .$$

Soit G l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les fonctions f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = -f(-x)\ .$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que $F \cap G$ est réduit à la fonction nulle.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les deux fonctions ϕ et ψ, définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$\phi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \; .$$
Montrer que $\phi \in F$, $\psi \in G$ et $f = \phi + \psi$.
4. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$.
5. Soit p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Calculer l'image par p et s des fonctions suivantes.
$$x \mapsto 1 + x \; , \quad x \mapsto x^2 + 2x^3 \; , \quad x \mapsto \mathrm{e}^x \; , \quad x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x}$$

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.
$$\begin{array}{ll} (1) \qquad & \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \; , \\ (2) \qquad & \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f) \; . \end{array}$$
2. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.
$$\begin{array}{ll} (3) \qquad & \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E \; , \\ (4) \qquad & \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f) \; . \end{array}$$
3. Montrer que si E est de dimension finie, alors les 4 propositions (1), (2), (3) et (4) sont équivalentes.
4. Vérifier que pour l'application dérivation de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, (1) et (2) sont fausses, (3) et (4) sont vraies.

Exercice 8. Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes, à coefficients réels. Pour chacune des matrices A suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$
Soit f l'application de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ dans lui-même, qui à une matrice carrée X associe $f(X) = AX$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Reprendre l'exercice pour l'application g qui à X associe $g(X) = XA$.

Exercice 9. Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes, à coefficients réels. Pour chacun des vecteurs colonnes v suivants.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'application de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, qui à une matrice carrée X associe $f(X) = Xv$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Reprendre l'exercice pour l'application g qui à X associe $g(X) = {}^t vX$.

Exercice 10. Pour tout entier $d \geqslant 1$, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ des polynômes de degré $\leqslant d$ en la variable X, de la base $\left(1, X, \dots, X^d\right)$. On considère les applications f suivantes.

- $f \ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_0[X]\,, \quad P(X) \longmapsto f(P) = P(1).$
- $f \ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]\,, \quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = XP'(X) + P(X).$
- $f \ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]\,, \quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = XP'(X) - P(X).$
- $f \ : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]\,, \quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = (X^2+1)P'(X) - 2XP(X).$
- $f \ : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]\,, \quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = P(1) + (X-1)P'(1).$
- $f \ : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]\,, \quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$
- $f \ : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]\,, \quad P(X) \longmapsto f(P)(X) = 3(X+1)P(X) - (X+1)^2P'(X).$

Pour chacune de ces applications :

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer l'image par f du polynôme $(X+2)^2$.
3. Donner la matrice de f, relative aux bases canoniques.
4. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Calculer les coordonnées du polynôme $(X+2)^2$ dans la base de l'espace de départ, effectuer le produit du vecteur obtenu par la matrice de f, et vérifier le calcul de la question 2.
6. Reprendre les questions 3 et 5, en remplaçant la base canonique de $\mathbb{R}_d[X]$ par la base :
$$\Big(1\,,\,(1+X)\,,\,(1+X+X^2)\,,\dots,\,(1+X+\cdots+X^d)\Big)$$

Exercice 11. On considère les équations de récurrence linéaires suivantes.

$$\begin{array}{rclcrcl}
u_{n+2} &=& u_{n+1} + 2u_n & \qquad & u_{n+2} &=& \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n \\
u_{n+2} &=& 2u_{n+1} - 2u_n & & u_{n+2} &=& -2u_{n+1} - u_n \\
u_{n+2} &=& \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n & & u_{n+2} &=& -u_n \\
u_{n+2} &=& u_{n+1} - u_n & & u_{n+2} &=& u_{n+1} - 2u_n \\
u_{n+2} &=& 4u_{n+1} - 4u_n & & u_{n+2} &=& 4u_{n+1} + 4u_n
\end{array}$$

Pour chacune de ces équations,

1. Déterminer l'ensemble des suites de réels qui la vérifient.
2. Déterminer la suite (u_n) vérifiant l'équation et $u_0 = 1$, $u_1 = -1$.
3. Déterminer la suite (u_n) vérifiant l'équation et $u_0 = 0$, $u_1 = 2$.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{A}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ |z| = 1 \Big\}$.

$\boxed{\text{B}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ |z| = 0 \Big\}$.

$\boxed{\text{C}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) = 0 \Big\}$.

$\boxed{\text{D}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Im}(z) = 1 \Big\}$.

$\boxed{\text{E}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{i}z + 1 = 0 \Big\}$.

Question 2. L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{\text{A}}$ $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}[X]\,,\ P(X)P(-X) = P(X^2) \Big\}$.

$\boxed{\text{B}}$ $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}[X]\,,\ P'(X) = X^2 \Big\}$.

$\boxed{\text{C}}$ $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}[X]\,,\ P(X) = P(1 - X) \Big\}$.

$\boxed{\text{D}}$ $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}[X]\,,\ P(X) = X(1 - P'(X)) \Big\}$.

$\boxed{\text{E}}$ $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}[X]\,,\ P(X) = P(X^2) \Big\}$.

Question 3. La famille $\mathcal{V}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{V} = \Big((X-1)^n\,,\ n \in \mathbb{N} \Big)$.

$\boxed{\text{B}}$ $\mathcal{V} = \Big((X-n)\,,\ n \in \mathbb{N} \Big)$.

$\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{V} = \Big((X-m)^n\,,\ (m,n) \in \mathbb{N}^2 \Big)$.

$\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{V} = \Big(X^{2n}\,,\ n \in \mathbb{N} \Big)$.

$\boxed{\text{E}}$ $\mathcal{V} = \Big((X-1)^{2n}\,,\ n \in \mathbb{N} \Big)$.

Question 4. La famille $\mathcal{V}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{V} = \Big(x \mapsto x^2\,,\ x \mapsto x\,,\ x \mapsto \mathrm{e}^x\,,\ x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} \Big)$.

$\boxed{\text{B}}$ $\mathcal{V} = \Big(x \mapsto \sin(x)\,,\ x \mapsto \sin(3x)\,, x \mapsto \sin^3(x) \Big)$.

$\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{V} = \Big(x \mapsto \sin(x)\,,\ x \mapsto \sin(2x)\,, x \mapsto \sin^2(x) \Big)$.

$\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{V} = \Big(x \mapsto 1\,,\, x \mapsto \mathrm{e}^x\,, x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\,,\, x \mapsto (1+\mathrm{e}^x)^2 \Big)$.
$\boxed{\text{E}}$ $\mathcal{V} = \Big(x \mapsto 1\,,\, x \mapsto \cos(x)\,, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto (1+\cos(x)^2) \Big)$.

Question 5. Les espaces vectoriels E et F sont tels que $F \oplus G = \mathbb{C}$
$\boxed{\text{A}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \Big\}$ et $F = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\, x \in \mathbb{R} \Big\}$.
$\boxed{\text{B}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) = 0 \Big\}$ et $F = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\, x \in \mathbb{R} \Big\}$.
$\boxed{\text{C}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ |z| = 0 \Big\}$ et $F = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\, x \in \mathbb{R} \Big\}$.
$\boxed{\text{D}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z) \Big\}$ et $F = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\, x \in \mathbb{R} \Big\}$.
$\boxed{\text{E}}$ $E = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R} \Big\}$ et $F = \Big\{ z \in \mathbb{C}\,,\ z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\, x \in \mathbb{R} \Big\}$.

Question 6. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $\mathcal{V}$ est de dimension 3.
$\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{V} = \Big(1\,,\, X\,,\, X^2\,,\, X^3 \Big)$.
$\boxed{\text{B}}$ $\mathcal{V} = \Big(X\,,\, X^2\,,\, X^3\,,\, X(1+X)^2 \Big)$.
$\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{V} = \Big(X\,,\, X^2\,,\, X^3\,,\, X(1+X)^3 \Big)$.
$\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{V} = \Big((1+X)\,,\, X^2\,,\, X^3\,,\, X^2(1+X) \Big)$.
$\boxed{\text{E}}$ $\mathcal{V} = \Big(X^2\,,\, X^3\,,\, X^2(1+X) \Big)$.

Question 7. L'application f, de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire.
$\boxed{\text{A}}$ $f\ : P(X) \mapsto P(0)P'(1)$.
$\boxed{\text{B}}$ $f\ : P(X) \mapsto P(0) + P'(1)$.
$\boxed{\text{C}}$ $f\ : P(X) \mapsto \deg(P)$.
$\boxed{\text{D}}$ $f\ : P(X) \mapsto (P(0) + P'(1))^2$.
$\boxed{\text{E}}$ $f\ : P(X) \mapsto P(0) + P'(2) + 2P''(3)$.

Question 8. On considère l'application linéaire f, de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à une matrice 2×2 associe sa trace (somme des deux éléments diagonaux).
$\boxed{\text{A}}$ f est injective.
$\boxed{\text{B}}$ La matrice identité est élément de $\mathrm{Ker}(f)$.
$\boxed{\text{C}}$ f est surjective.
$\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension 3.
$\boxed{\text{E}}$ $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel de dimension 3.

Question 9. On considère les deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}_2[X]$ définis comme suit.

$$F = \Big\{ bX + cX^2\,,\ (b,c) \in \mathbb{R}^2 \Big\} \quad \text{et} \quad G = \Big\{ a + aX\,,\ a \in \mathbb{R} \Big\}$$

On admettra que $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.

$\boxed{\text{A}}$ $p(1 + 2X + X^2) = 2X + X^2$.
$\boxed{\text{B}}$ $s(1 + 2X + X^2) = -1 + X^2$.
$\boxed{\text{C}}$ $s(1 - X) = -1 + X$
$\boxed{\text{D}}$ $p(1 + X^2) = -1 - 2X + X^2$.
$\boxed{\text{E}}$ $p(1 - X) = 0$.

Question 10. On considère l'équation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante.

$$(\mathcal{E}) \qquad\qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \ .$$

$\boxed{\text{A}}$ L'ensemble des suites à valeurs réelles solutions de $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{B}}$ $(\mathcal{E})$ admet des solutions non nulles qui sont des suites périodiques.
$\boxed{\text{C}}$ $(\mathcal{E})$ admet des solutions non nulles qui sont des suites convergentes.
$\boxed{\text{D}}$ $(\mathcal{E})$ admet pour solution la suite $\Big(\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^{2n})\Big)_{n\in\mathbb{N}}$.
$\boxed{\text{E}}$ $(\mathcal{E})$ admet des solutions non nulles qui sont des suites à valeurs entières.

Réponses : 1–BC 2–CE 3–AC 4–AC 5–BD 6–BD 7–BE 8–CE 9–BD 10–AE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours :

1. Quand dit-on d'une application f entre deux espaces vectoriels E et F qu'elle est *linéaire* ?
2. Définir l'*image* d'une application linéaire f.
3. Démontrer qu'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels E et F est *surjective* si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
4. Définir le *noyau* d'une application linéaire f.
5. Démontrer qu'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels E et F est *injective* si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Exercice 1 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à P associe $P(1)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
   On note $F = \mathrm{Ker}(f)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrer que $\Big(X-1, X^2-1 \Big)$ est une base de F.
3. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, engendré par le polynôme (X^2+1). Montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. On note $\mathcal{B} = \Big(X-1, X^2-1, X^2+1 \Big)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Ecrire la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}$ (au départ) et (1) (à l'arrivée).
6. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des polynômes 1, X et X^2.
7. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.
8. Donner la matrice de p et la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$.
9. Déterminer l'image par p et par s des polynômes 1, X et X^2. En déduire les matrices de p et s dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère la famille $\mathcal{V}$ suivante.

$$\mathcal{V} = \Big(x \mapsto \sin(x)\,,\; x \mapsto \cos(x)\,,\; x \mapsto \sin(2x)\,, x \mapsto \cos(2x) \Big)\;.$$

On note E l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{V}$, et D l'application qui à f associe sa dérivée f'.

1. Montrer que $\mathcal{V}$ est une famille libre.
2. Montrer que D est un endomorphisme de E.
3. Montrer que D est un automorphisme de E.

Exercice 3 : On considère l'équation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante.

$$(\mathcal{E}) \qquad\qquad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n/2\;.$$

1. Ecrire et résoudre l'équation caractéristique associée.
2. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de $(\mathcal{E})$.
3. Soit (u_n) la suite solution de $(\mathcal{E})$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donner une expression de u_n en fonction de n.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. On dit qu'une application f entre deux espaces vectoriels E et F est *linéaire* si :

$$\forall x, y \in E\,,\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)\;.$$

2. L'image d'une application linéaire f de E dans F est le sous-espace vectoriel de F défini par :
$$\mathrm{Im}(f) = \Big\{\, f(x)\,,\ x \in E \,\Big\}\ .$$
3. Par définition, une application est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.
$$\forall y \in F\ ,\ \exists x \in E\ ,\quad y = f(x)\ .$$
Donc une application linéaire f entre deux espaces vectoriels E et F est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
4. Le noyau d'une application linéaire f est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul de F.
$$\mathrm{Ker}(f) = \Big\{\, x \in E\ ,\ f(x) = 0 \,\Big\}\ .$$
5. Nous avons deux implications à démontrer. Montrons d'abord que si f est injective alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
Une application entre deux ensembles est injective si deux éléments distincts de E n'ont jamais la même image par f. Le vecteur nul de E a pour image par f, le vecteur nul de F. Puisque f est injective, aucun vecteur non nul de E ne peut avoir pour image 0. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
Montrons maintenant la réciproque. Supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Puisque f est linéaire, $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$. Donc $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $x - y = 0$, donc $x = y$.

Exercice 1 :

1. Nous devons montrer que :
$$\forall P, Q \in F\ ,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ ,\quad f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)\ .$$
Cela découle immédiatement du fait que $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1)$.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, L'image par f du polynôme constant a est le réel a. Donc f est surjective. L'espace de départ est de dimension 3, l'image est de dimension 1. D'après le théorème du rang, le noyau est de dimension $3 - 1 = 2$.
2. Observons d'abord que les deux polynômes de la famille appartiennent bien à F. Montrons que $\big(\, X-1, X^2-1 \,\big)$ est une famille libre. Si a et b sont deux réels tels que $a(X-1) + b(X^2-1) = 0$, alors :
$$bX^2 + aX - (a+b) = 0 \implies a = b = 0\ .$$
L'espace vectoriel F est de dimension 2, donc toute famille libre de 2 éléments est une base.

3. Le polynôme X^2+1 est non nul, il forme une famille libre, donc une base de G.
4. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3. Pour montrer que $\mathcal{B} = \Big(X-1, X^2-1, X^2+1\Big)$ est une base, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient a, b, c trois réels. Supposons que :

$$P = a(X-1) + b(X^2-1) + c(X^2+1) = (b+c)X^2 + aX + (-a-b+c) = 0 \; .$$

Alors, (a, b, c) est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} & b & +c & = & 0 \\ a & & & = & 0 \\ -a & -b & +c & = & 0 \; . \end{array}\right.$$

La seconde équation donne $a = 0$; en prenant la somme et la différence de la première et de la troisième, on en déduit $b = c = 0$.
5. Les images par f des éléments de la base $\mathcal{B}$ sont :

$$f(X-1) = 0 \; , \quad f(X^2-1) = 0 \; , \quad f(X^2+1) = 2 \; .$$

La matrice de f est donc :

$$(0, 0, 2) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \; .$$

6. En calculant directement on obtient :

$$1 = 0(X-1) - \frac{1}{2}(X^2-1) + \frac{1}{2}(X^2+1) \; ,$$

$$X = 1(X-1) - \frac{1}{2}(X^2-1) + \frac{1}{2}(X^2+1) \; ,$$

$$X^2 = 0(X-1) + \frac{1}{2}(X^2-1) + \frac{1}{2}(X^2+1) \; .$$

On pouvait aussi calculer ces coordonnées en écrivant la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, puis en calculant son inverse.

$$\pi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

7. Puisque $\mathcal{B}$ est une base, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, il existe un triplet unique de réels (a, b, c) tel que :

$$P(X) = a(X-1) + b(X^2-1) + c(X^2+1) \; .$$

Le polynôme $a(X-1)+b(X^2-1)$ appartient à F, le polynôme $c(X^2+1)$ appartient à G. Tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ est somme d'un élément de F et d'un élément de G, donc $F+G=\mathbb{R}_2[X]$.

Pour démontrer que la somme est directe, il faut montrer en plus que $F\cap G=\{0\}$. Soient a,b,c trois réels tels que :

$$a(X-1)+b(X^2-1)=c(X^2+1)\ .$$

Alors $a=b=c=0$, car $\mathcal{B}$ est une famille libre.

8. La projection p envoie $X-1$ et X^2-1 sur eux-mêmes, X^2+1 sur 0. D'où la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

La symétrie s envoie $X-1$ et X^2-1 sur eux-mêmes, X^2+1 sur son opposé. D'où la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

9.

$$\begin{aligned}
p(1) &= p\left(0(X-1)-\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{2}(X^2+1)\right) = -\frac{1}{2}(X^2-1)\ ,\\
p(X) &= p\left(1(X-1)-\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{2}(X^2+1)\right) = 1(X-1)-\frac{1}{2}(X^2-1)\ ,\\
p(X^2) &= p\left(0(X-1)+\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{2}(X^2+1)\right) = \frac{1}{2}(X^2-1)\ .
\end{aligned}$$

On en déduit la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned}
s(1) &= s\left(0(X-1)-\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{2}(X^2+1)\right) = -\frac{1}{2}(X^2-1)-\frac{1}{2}(X^2+1)\ ,\\
s(X) &= s\left((X-1)-\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{2}(X^2+1)\right) = (X-1)-\frac{1}{2}(X^2-1)-\frac{1}{2}(X^2+1)\ ,\\
s(X^2) &= s\left(0(X-1)+\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{2}(X^2+1)\right) = \frac{1}{2}(X^2-1)-\frac{1}{2}(X^2+1)\ .
\end{aligned}$$

On en déduit la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On pouvait aussi calculer la matrice de p (respectivement : s) en effectuant le produit matriciel $\pi A \pi^{-1}$, où A est la matrice de p (respectivement s) dans la base $\mathcal{B}$ et π est la matrice exprimant les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique.

Exercice 2 :

1. Soit a, b, c, d quatre réels. Notons f l'application

$$f \ : x \mapsto a\sin(x) + b\cos(x) + c\sin(2x) + d\cos(2x) .$$

Pour montrer que $\mathcal{V}$ est une famille libre, nous devons montrer que si f est l'application nulle, alors $a = b = c = d = 0$. Pour cela, nous choisissons des valeurs particulières pour x :

$$\begin{array}{lcccll} f(0) & = & 0 & \Longrightarrow & b+d & = & 0 \\ f(\pi) & = & 0 & \Longrightarrow & -b+d & = & 0 \\ f(\pi/2) & = & 0 & \Longrightarrow & a-d & = & 0 \\ f(\pi/4) & = & 0 & \Longrightarrow & (a+b)\sqrt{2}/2 + c & = & 0 . \end{array}$$

En prenant la somme et la différence des deux premières équations, on obtient $b = d = 0$. La troisième implique alors que $a = 0$. On déduit ensuite $c = 0$ de la quatrième.

2. Nous devons montrer que D est une application de E dans E et qu'elle est linéaire. D'après la question précédente, $\mathcal{V}$ est une base de E. Pour tout élément f de E, il existe 4 réels a, b, c, d tels que :

$$f \ : x \mapsto a\sin(x) + b\cos(x) + c\sin(2x) + d\cos(2x) .$$

L'image de f par D est :

$$D(f) \ : x \mapsto a\cos(x) - b\sin(x) + 2c\cos(2x) - 2d\sin(2x) .$$

L'application $D(f)$ est bien élément de E.

Pour démontrer la linéarité, il suffit d'appliquer les résultats généraux sur la dérivation : si f et g sont dérivables et si λ et μ sont deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

3. Nous savons que D est un endomorphisme, il suffit de montrer que D est bijective. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie et D est une application linéaire de E dans lui-même, il nous suffit de vérifier que D est injective (ou bien surjective, mais il est inutile de vérifier les deux).

Pour montrer que D est injective, il suffit de montrer que son noyau ne contient que l'application nulle. En reprenant les expressions de la question précédente, si f s'écrit :

$$f \ : x \mapsto a\sin(x) + b\cos(x) + c\sin(2x) + d\cos(2x)$$

l'image de f par D est :

$$D(f) \ : x \mapsto a\cos(x) - b\sin(x) + 2c\cos(2x) - 2d\sin(2x)\ .$$

Puisque $\mathcal{V}$ est une famille libre, $D(f) = 0$ implique $a = 0$, $-b = 0$, $2c = 0$, $-2d = 0$. Donc $a = b = c = d = 0$ et f est l'application nulle.

Exercice 3 :

1. L'équation caractéristique associée est $r^2 = r - 1/2$. Ses solutions sont :

$$r_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\ .$$

2. L'ensemble E des solutions réelles de $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Une base est donnée par les deux suites :

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\cos(n\pi/4) \quad \text{et} \quad \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\sin(n\pi/4)\ .$$

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\Big(a\cos(n\pi/4) + b\sin(n\pi/4)\Big)\right)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}\ .$$

3. Nous savons qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}^n}\Big(a\cos(n\pi/4) + b\sin(n\pi/4)\Big)\ .$$

En reportant les valeurs de u_n pour $n = 0$ et $n = 2$, on trouve $a = 0$ et $b = 2$. La suite (u_n) est donc :

$$\left(\frac{2}{(\sqrt{2})^n}\sin(n\pi/4)\right)_{n\in\mathbb{N}}\ .$$

---

3 Compléments

3.1 Kate and William : so romantic !

C'est à Sir William Rowan Hamilton [1] (1805–1865) que vous devez le terme de vecteur, en même temps que les quaternions. Éduqué par son oncle James, ce fut un enfant prodige. D'après la sœur de James, à 5 ans il impressionnait les visiteurs de la famille par sa connaissance du grec.

> There was a Mr. Montgomery with the Elliots the other day ; he is a curate and takes a certain number of boys. We were there : they had been talking a great deal of Willy to him ; however he looked on it all as nonsense, 'til after tea Mr. Elliot got a Greek Homer and desired Mr. Montgomery to examine him. When he opened the book, he said, "oh this book has contractions, Mr. Elliot, of course the child cannot read it". "Try him, sir", said James. To his amazement Willy went on with the greatest ease. Mr. Montgomery dropped the book and paced the room ; but every now and then he would come and stare at Willy, and when he went away, he told Mr. and Mrs. Elliot that such a thing he had never heard of and that he really was seized with a degree of awe that made him almost afraid to look at Willy. He would not, he said, have thought as much of it had he been a grave, quiet child ; but to see him the whole evening acting on the most infantile manner and then reading all these things astonished him more than he could express.

À 19 ans, encore étudiant mais déjà considéré comme le meilleur mathématicien irlandais, il rencontre Catherine Disney.

> Wonderful hour ! of my sitting, irregularly, from the very first, – beside her ; when, without a word said of love, we gave away our lives to each other. She was, as you know, beautiful ; I was only clever and (already) celebrated.

Malheureusement, il avait à peine déclaré sa flamme, qu'il reçut la nouvelle que Catherine devait se marier avec William Barlow, de 15 ans plus âgé qu'elle. Bien des années plus tard, marié lui-même, il n'avait toujours pas oublié Catherine.

> The same remembrance has run like a river through my life, hidden seemingly for intervals, but breaking forth again with an occasional power which terrifies me – a really frightful degree of force and vividness.

Catherine non plus n'avait pas oublié : tentative de suicide, séparation, sa vie n'avait jamais été heureuse. Un jour de 1853, presque 30 ans après leur première rencontre, Hamilton reçut un plumier portant l'inscription « From one you must never forget, nor think unkindly of, and who would have died more contented if we had once more met ». Il se précipita chez Catherine, à temps pour la revoir une dernière fois : elle mourut deux semaines plus tard.

1. F. Ó Cairbre, William Rowan hamilton (1805–1965) : Ireland's greatest mathematician, *Ríocht na Midhe, Vol 11, p. 124–150 (2000)*

Comment Hamilton supporta-t-il la tragédie de sa vie ? La religion dit-il, la poésie dit son ami Wordsworth, l'alcool dit son entourage... et les mathématiques bien sûr !

3.2 Équations de récurrence linéaires

Nous présentons ici la généralisation du théorème 8 aux équations d'ordre quelconque.

Considérons l'équation $\mathcal{E}$:

$$(\mathcal{E}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+d} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{d-1} u_{n+d-1}\ .$$

Pour connaître la forme des solutions de $(\mathcal{E})$, il faut résoudre l'*équation caractéristique associée* :

$$(ECA) \qquad r^d = a_0 + a_1 r + \cdots + a_{d-1} r^{d-1}\ .$$

C'est la condition pour que $(u_n) = (r^n)$ soit solution de $(\mathcal{E})$.

On démontre le résultat suivant, qui généralise le théorème 8.

Théorème 9. *L'ensemble des suites complexes solution de $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{C}$.*

Notons $r_1, \ldots, r_k$ les racines (réelles ou complexes) de l'équation caractéristique associée (ECA) et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités. Toute solution de l'équation $(\mathcal{E})$. s'écrit :

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} \lambda_{i,j} n^j (r_i)^n\ , \tag{3}$$

où les d coefficients $\lambda_{i,j}\ ,\ i = 1, \ldots, k\ ,\ j = 0, \ldots, m_i - 1$ sont réels ou complexes.

En pratique, pour déterminer une solution vérifiant d conditions particulières, il suffit de calculer ses coefficients $\lambda_{i,j}$ en résolvant un système linéaire ordinaire, de d équations à d inconnues.

Exemple : Considérons l'équation suivante :

$$(\mathcal{E}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+3} = u_n + u_{n+1} - u_{n+2}\ .$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(ECA) \qquad r^3 = 1 + r - r^2\ .$$

Elle a pour racines 1 (racine simple) et -1 (racine double). Toute solution de l'équation de récurrence s'écrit donc :

$$u_n = a(1)^n + b(-1)^n + cn(-1)^n\ .$$

Pour trouver la solution qui vérifie $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, on résout le système suivant.

$$\begin{cases} a+b & = & -1 \\ a-b-c & = & 1 \\ a+b+2c & = & 0 \end{cases}$$

La solution est $a = 1/4$, $b = -5/4$, $c = 1/2$. On obtient :

$$u_n = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}n(-1)^n \ .$$

3.3 Équations différentielles linéaires

Les équations différentielles linéaires sont très proches des équations de récurrence traitées ci-dessus. Considérons l'équation $\mathcal{E}$:

$$(\mathcal{E}) \qquad y^{(d)}(t) = a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \cdots + a_{d-1} y^{(d-1)}(t) \ ,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ sont d coefficients réels, y est une fonction indéfiniment dérivable, et $y^{(k)}$ désigne sa dérivée k-ième. Pour connaître la forme des solutions de $(\mathcal{E})$, il faut résoudre l'équation suivante :

$$(ECA) \qquad r^d = a_0 + a_1 r + \cdots + a_{d-1} r^{d-1} \ .$$

Cette équation porte aussi le nom d'*équation caractéristique associée.* C'est la condition pour que $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ soit solution de $(\mathcal{E})$.

Le résultat suivant est l'analogue du théorème 9 et sa démonstration est très proche.

Théorème 10. *L'ensemble des solutions (réelles ou complexes) de l'équation $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{C}$.*

Notons $r_1, \ldots, r_k$ les racines (réelles ou complexes) de l'équation caractéristique associée (ECA) et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités. Toute solution de l'équation $(\mathcal{E})$ s'écrit :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} \lambda_{i,j} t^j \mathrm{e}^{r_i t} \ ,$$

où les d coefficients $\lambda_{i,j}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, m_i - 1$ sont réels ou complexes.

En pratique, pour déterminer une solution vérifiant d conditions particulières, il suffit de calculer ses coefficients $\lambda_{i,j}$ en résolvant un système linéaire ordinaire, de d équations à d inconnues.

Exemple : Considérons l'équation suivante :

$$(\mathcal{E}) \qquad y'''(t) = y(t) + y'(t) - y''(t) \ .$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(ECA) \qquad r^3 = 1 + r - r^2 \; .$$

Cette équation a pour racines 1 (racine simple) et -1 (racine double). Toute solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$y(t) = a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{-t} + ct\mathrm{e}^{-t} \; .$$

Pour trouver la solution qui vérifie $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, on résout le système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a + b & = & -1 \\ a - b + c & = & 1 \\ a + b - 2c & = & 0 \end{array} \right.$$

La solution est $a = 1/4$, $b = -5/4$, $c = -1/2$. La fonction cherchée est donc :

$$y(t) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^t - \frac{5}{4}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t} \; .$$

Il se peut que l'équation caractéristique associée admette des racines complexes conjuguées. Supposons que $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ soit racine de (ECA), alors $\overline{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ est aussi solution. Donc $\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}$ et toutes leurs combinaisons linéaires sont solutions de $(\mathcal{E})$. En particulier :

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda t} + \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) \; .$$

Parmi les solutions réelles de $(\mathcal{E})$, on trouvera donc toutes les combinaisons linéaires de ces deux fonctions.

L'ensemble des solutions *réelles* de $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Considérons l'équation suivante.

$$(\mathcal{E}) \qquad y''(t) = -y(t) - y'(t) \; .$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(ECA) \qquad r^2 = -1 - r \; .$$

Ses racines sont :

$$j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{j} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \; .$$

Toute solution *réelle* de l'équation différentielle s'écrit :

$$y(t) = a\mathrm{e}^{-t/2}\cos(t\sqrt{3}/2) + b\mathrm{e}^{-t/2}\sin(t\sqrt{3}/2) \; .$$

Cette équation pourrait correspondre aux petites oscillations d'un pendule en milieu visqueux. Les solutions trouvées tendent vers 0, avec des oscillations de plus en plus atténuées.

3.4 Polynômes de Lagrange

Même s'ils le font très vite, il n'y a guère qu'une chose que les ordinateurs sachent faire avec des nombres : les ajouter et les multiplier, donc évaluer des fonctions polynômes. Si on doit effectuer des calculs sur une fonction quelconque, il est important de pouvoir l'approcher par des fonctions polynômes.

Selon le sens précis que l'on donne à « approcher », il existe une grande variété de techniques, et autant de familles de polynômes qui leur sont adaptées. Nous traitons ici une des questions les plus simples : comment construire un polynôme de degré minimal, dont le graphe passe par certains points du plan. C'est le problème de l'*interpolation*.

Nous commençons par nous donner les abscisses des points. Ce sont n réels, $a_1, \ldots, a_n$, différents deux à deux. Nous définissons maintenant n polynômes $L_1, \ldots, L_n$, de degré $n-1$, qui sont tels que $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ pour $j \neq i$.

Définition 12. *On appelle* polynômes interpolateurs de Lagrange *aux abscisses $a_1, \ldots, a_n$, les n polynômes $L_1, \ldots, L_n$, définis pour $i = 1, \ldots, n$ par :*

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} .$$

Voici les trois polynômes associés aux abscisses $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$.

$$L_1(X) = \frac{X-4}{2-4}\,\frac{X-5}{2-5} , \quad L_2(X) = \frac{X-2}{4-2}\,\frac{X-5}{4-5} , \quad L_3(X) = \frac{X-2}{5-2}\,\frac{X-4}{5-4} ,$$

Nous sommes intéressés par les combinaisons linéaires des $L_i(X)$. Prenons n réels $b_1, \ldots, b_n$, et formons le polynôme

$$P(X) = b_1\, L_1(X) + \cdots + b_n\, L_n(X) .$$

Remplaçons X par a_i. Tous les termes $L_j(a_i)$ s'annulent, sauf $L_i(a_i)$ qui vaut 1. Donc $P(a_i) = b_i$. La fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ passe par les n points $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$: elle les *interpole*. Par exemple pour $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$ et $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$,

$$P(X) = 3\, L_1(X) + 2\, L_2(X) + 3\, L_3(X) = \frac{5}{6}\, X^2 - \frac{11}{2}\, X + \frac{32}{3} .$$

La figure 3 représente le graphe de $P(x)$.

Le polynôme P ainsi construit est le seul polynôme de degré $\leqslant n-1$ qui interpole les points $(a_1, b_n), \ldots, (a_n, b_n)$: on le déduit de la proposition suivante.

Proposition 13. *Les n polynômes $L_1(X), \ldots, L_n(X)$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n-1$.*

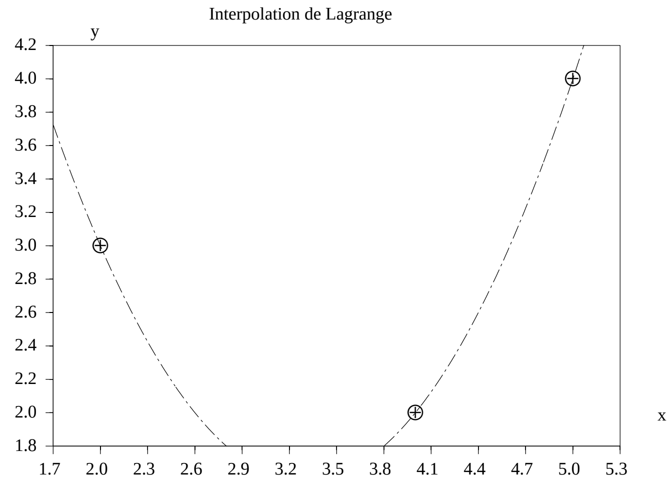

FIGURE 3 – Interpolation par un polynôme de Lagrange des points d'abscisses $(2,4,5)$ et d'ordonnées $(3,2,4)$.

Démonstration : Comme la dimension de l'espace est n, il suffit de montrer que la famille $\Big(L_1(X),\ldots,L_n(X)\Big)$ est libre. Considérons une combinaison linéaire, et supposons qu'elle est nulle.

$$P(X) = b_1\,L_1(X) + \cdots + b_n\,L_n(X) = 0\;.$$

Comme pour tout $i=1,\ldots,n$, $P(a_i)=b_i$, on doit avoir $b_i=0$. D'où le résultat. $\square$

Les valeurs $b_1,\ldots,b_n$ sont les *coordonnées* du polynôme $P(X)$ dans la base $\Big(L_1(X),\ldots,L_n(X)\Big)$.

3.5 Transformée de Fourier

D'autres polynômes, à valeurs complexes, vont nous donner l'occasion d'évoquer l'œuvre de Joseph Fourier [2] (1768 – 1830).

À l'âge de 30 ans, jeune professeur à l'École Polytechnique, il est invité par Bonaparte à participer à l'expédition d'Égypte. Ce voyage déterminera largement le cours de sa vie. D'abord sa carrière : ses qualités d'organisateur et de négociateur, louées par tous là-bas (amis et ennemis), lui vaudront au retour d'être nommé préfet de l'Isère, où il restera de 1802 à 1815. Elles lui vaudront aussi d'être le coordonnateur de la publication du rapport de l'expédition (10 volumes de planches gravées, 9 volumes de texte, et un atlas), dont il rédigera la préface. Fourier n'eut jamais de vie de famille, et aucune liaison sentimentale connue. Ce n'est pas qu'il n'ait jamais eu d'occasion.

2. voir http ://joseph.fourier.free.fr/

Dans une lettre [3] à un de ses anciens professeurs d'Auxerre devenu son ami, il fait part avec humour de son sentiment sur les accusations portées contre son action pendant la Terreur.

> C'est donc de la terreur que j'ai inspirée. Ma foi je ne vois pas que j'en aie fait éprouver aux êtres les plus faibles, aux femmes. Et si j'en avais cru quelques unes, elles me paraissaient fort disposées à d'énormes sacrifices.

On ne lui connaît qu'un seul véritable ami, Jacques-Joseph Champollion. Ce dernier avait fait venir à Grenoble son jeune frère Jean-François en 1801 : il est probable que la passion des deux amis pour les antiquités d'Égypte, ait été à l'origine de la vocation de Jean-François, qui découvrira le secret des hiéroglyphes en 1822.

L'expédition d'Égypte a peut-être eu une autre conséquence, qui pour être plus indirecte, n'en est pas moins fondamentale. Fourier aurait contracté en Égypte une fièvre ou un rhumatisme chronique, qui le rendait très sensible au froid. Arago [4], parlant de lui vers la fin de sa vie, dit :

> Pour se dérober à de légères atteintes rhumatismales, notre confrère se vêtait, dans la saison la plus chaude de l'année, comme ne le sont même pas les voyageurs condamnés à hiverner au milieu des glaces polaires. On me suppose de l'embonpoint, disait-il quelquefois en riant ; soyez assuré qu'il y a beaucoup à rabattre de cette opinion. Si, à l'exemple des momies égyptiennes, on me soumettait, ce dont Dieu me préserve ! à l'opération de désemmaillottement, on ne trouverait pour résidu qu'un corps assez fluet. Je pourrais ajouter, en choisissant aussi mon terme de comparaison sur les bords du Nil, que dans les appartements de Fourier, toujours peu spacieux et fortement chauffés, même en été, les courants d'air auxquels on était exposé près des portes, ressemblaient quelquefois à ce terrible Seïmoun, à ce vent brûlant du désert que les caravanes redoutent à l'égal de la peste.

Si la relation particulière que Fourier entretenait avec la chaleur est avérée, l'hypothèse d'une fièvre contractée en Égypte n'est pas confirmée par le passage suivant de la lettre qu'il écrivit à son retour.

> Je viens enfin, mon cher Bonard, de terminer mon voyage en Égypte, qui ne me laisse que le plus agréable souvenir. Je suis entré il y a quelques jours dans le port de Toulon et je suis d'une santé aussi bonne que je puis le désirer après d'aussi longues fatigues.

Le travail que Fourier a réalisé sur la diffusion de la chaleur entre 1804 et 1807, se basait entre autres sur une intuition géniale : toute fonction continue peut être approchée par des polynômes trigonométriques.

3. Lettres de Joseph Fourier *Bulletin de la Société des Sciences Historiques et Naturelles de l'Yonne, Vol. 12, p. 105–134 (1858)*

4. F. Arago, Éloge historique de Joseph Fourier, *Académie des Sciences, Paris, 1833*

Considérons la famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\mathrm{e}^{-nix}, \mathrm{e}^{-(n-1)\mathrm{i}x}, \ldots, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \ldots, \mathrm{e}^{(n-1)\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{nix}\right) .$$

On peut démontrer que c'est une famille libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Elle engendre l'espace vectoriel des fonctions qui s'écrivent :

$$\varphi(x) = \lambda_{-n}\,\mathrm{e}^{-nix} + \cdots + \lambda_{-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \lambda_0 + \lambda_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \cdots + \lambda_n\,\mathrm{e}^{nix} .$$

On les appelle des *polynômes trigonométriques*. Ce sont des fonctions continues, périodiques de période 2π. Il suffit de remplacer x par $2\pi x/T$ pour obtenir des fonctions de période T.

Étant donnée une fonction f, continue sur $[0, 2\pi]$, on définit ses *coefficients de Fourier* par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ , \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-k\mathrm{i}x}\,dx .$$

On leur associe les polynômes trigonométriques

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{k\mathrm{i}x} .$$

Le théorème suivant n'a pas été démontré par Fourier, mais par Dirichlet.

Théorème 11. *Soit f une fonction dérivable sur* $]0, 2\pi[$. *Pour tout $x \in]0, 2\pi[$,*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{k\mathrm{i}x} .$$

Le passage de la fonction f à la (double) suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ s'appelle *transformation de Fourier*. De nos jours, la transformation de Fourier est un outil fondamental dans de nombreux domaines, en particulier le traitement du signal. Elle est à la base du format JPEG de compression des images.

Parce qu'on le soupçonnait de n'avoir pas établi sa méthode sur des bases suffisamment rigoureuses, Fourier a subi de nombreuses critiques en particulier de la part de Poisson. Son travail a été finalement reconnu par une élection à l'Académie des Sciences en 1817, et publié en 1822.

En Égypte, Fourier avait fait l'unanimité par ses qualités humaines. À Grenoble aussi, il était apprécié de tous pour son travail acharné, sa politesse, son sens de la diplomatie et son honnêteté rigoureuse. On dit qu'il était très aimé des Grenoblois et qu'il était même souvent applaudi en ville, par exemple quand il allait au théâtre. Aimé de tous ? Presque !

> Une des sources de mon ennui à Grenoble était le petit savant spirituel à l'âme parfaitement petite et à la politesse basse de domestique revêtu, nommé Fourier.

Cette citation venimeuse est signée… Stendhal.